Guide de traduction des phrases en français en formules logiques

1. Logique propositionnelle

- **Aspect temporel :** De façon générale, dans les phrases-types, on peut remplacer « **si** » par « **quand** » et cela ne change pas la traduction. Les phrases sont données seulement avec des « si » pour ne pas surcharger. En effet, lorsqu'on a des phrases avec des « quand », on peut voir les interprétations comme décrivant un état possible du monde à un instant donné. Un modèle d'un ensemble de formules correspond alors à un instant où toutes les formules sont vraies simultanément.
  N.B. : Le « quand » peut parfois être sous-entendu, par exemple : « Le matin, il fait froid » = « Quand c'est le matin, il fait froid » donc $M \Rightarrow F$. « Je suis absent la nuit » = « Je suis absent quand il fait nuit » donc $N \Rightarrow A$.
- Les temps et modes des verbes ne changent rien à la formalisation : « s'il pleuvait, il y aurait des nuages » se traduit exactement comme « s'il pleut, il y a des nuages » : $P \Rightarrow N$. La nuance de sens est juste le sous-entendu dans le premier cas que en réalité il ne pleut pas, mais comme en logique on fait abstraction de la réalité, cela ne nous concerne pas.
- Les mots comme « toujours », « jamais », « forcément », « nécessairement » peuvent apparaître pour renforcer les affirmations, mais lorsqu'on traduit on considère toujours les affirmations comme générales même si ces mots ne sont pas présents.

Phrases-types	**Formule**	**Exemples**
Si A alors B Si A, B Si A, c'est que B A seulement si B Ne A que si B Pour A, il faut [que] B Il suffit que/de A pour [que] B	$A \Rightarrow B$	Quand on voit le soleil, il fait jour : $S \Rightarrow J$ S'il y a une trace de pas, c'est que quelqu'un est passé par là[1] : $TP \Rightarrow QP$ Il ne pleut que s'il y a des nuages : $P \Rightarrow N$ Pour rêver, il faut dormir : $R \Rightarrow D$
A si B A dès que B Pour A, il suffit que B Il faut [que] A pour [que] B A est nécessaire pour que B	$B \Rightarrow A$	Je sors dès qu'il fait beau : $B \Rightarrow S$ Ouvrir la bouche est nécessaire pour parler : $P \Rightarrow OB$
A si et seulement si B A est nécessaire et suffisant pour B Pour A, il faut et il suffit que B	$A \Leftrightarrow B$	
A ou B A sauf si B	$A \vee B$	Le chien est dehors sauf quand il pleut : $CD \vee P$
A et B A mais B	$A \wedge B$	J'aime les carottes mais pas les petits pois : $AC \wedge \neg APP$
A sans [que] B	$A \wedge \neg B$	Martin dort sans rêver : $MD \wedge \neg MR$
Ne pas/jamais A sans [que] B	$\neg(A \wedge \neg B)$ $\equiv A \Rightarrow B$	Je ne mange pas sans avoir faim : $\neg(M \wedge \neg F)$ ou $M \Rightarrow F$
Si A et si/que B, C Quand A, si B, C	$A \wedge B \Rightarrow C$[2] $\equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	S'il pleut et qu'il y a du vent, je ne sors pas : $P \wedge V \Rightarrow \neg S$
Si A ou si B, C C si A ou si B	$A \vee B \Rightarrow C$ $\equiv (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$	Le chat miaule dès qu'il a faim ou qu'il a peur : $CF \vee CP \Rightarrow CM$

Exemple un peu plus long : « Le matin, s'il fait beau, je pars me promener sans mettre mon manteau, sauf s'il fait trop froid » donne, avec M : c'est le matin, B : il fait beau, F : il fait trop froid, P : je pars me promener, MM : je mets mon manteau :

$$M \wedge B \Rightarrow (P \wedge \neg MM) \vee F$$

1. Attention à ne pas confondre implication et causalité. Ici c'est bien *l'effet* qui implique au sens logique la *cause*, car l'affirmation est que cet effet ne peut venir que de cette cause-là : si on constate l'effet, on est sûr que la cause a eu lieu. L'implication n'est pas forcément vraie dans l'autre sens, quelqu'un aurait pu passer sans laisser de trace.
2. Rappel : la conjonction et la disjonction sont prioritaires sur l'implication, donc les parenthèses ne sont pas nécessaires. On peut quand même les mettre : $(A \wedge B) \Rightarrow C$.

Guide de traduction des phrases en français en formules logiques

2. Logique du premier ordre

Phrases-types	**Formule**	**Exemples**
[Tous] les A sont [des] B Un A est un B Tout A est un B	$\forall x\, A(x) \Rightarrow B(x)$	Les souris sont quadrupèdes : $\forall x\, S(x) \Rightarrow Q(x)$ Une mouche est un invertébré : $\forall x\, M(x) \Rightarrow I(x)$
Certains A sont des B Il y a un A qui est B	$\exists x\, A(x) \wedge B(x)$	Certains éléphants peuvent voler : $\exists x\, E(x) \wedge PV(x)$
Seuls des A sont B Seul un A est B Il n'y a que des A qui sont B	$\forall x\, B(x) \Rightarrow A(x)$	Seul un bipède ou un insecte peut voler : $\forall x\, PV(x) \Rightarrow B(x) \vee I(x)$
Les A ne sont pas des B Aucun A n'est B	$\forall x\, A(x) \Rightarrow \neg B(x)$ $\equiv \neg(\exists x\, A(x) \wedge B(x))$	Les souris ne sont pas des éléphants : $\forall x\, S(x) \Rightarrow \neg E(x)$
Les A sont reliés par R aux B	$\forall x \forall y\, A(x) \wedge B(y) \Rightarrow R(x,y)$	Les chats effraient les souris : $\forall x \forall y\, C(x) \wedge S(y) \Rightarrow E(x,y)$

Ensembles : En mathématiques on a l'habitude de manipuler des ensembles. La façon de représenter un ensemble E en logique du premier ordre est par un prédicat d'arité 1 « appartenir à l'ensemble E », ce qui conduit à des formulations un peu différentes de ce dont on a l'habitude. **Attention en particulier à la traduction différente entre $\forall x \in A$ et $\exists x \in A$.**

Dans ce qui suit, $\mathcal{P}(x)$ désigne une propriété de x et $\langle \mathcal{P}(x) \rangle$ désigne une formule du 1$^{\text{er}}$ ordre qui représente cette propriété.

Maths	**Logique**	**Français**
$\forall x \in A, \mathcal{P}(x)$	$\forall x\, A(x) \Rightarrow \langle \mathcal{P}(x) \rangle$	Tout élément de A vérifie $\mathcal{P}$
$\exists x \in A, \mathcal{P}(x)$	$\exists x\, A(x) \wedge \langle \mathcal{P}(x) \rangle$	Au moins un élément de A vérifie $\mathcal{P}$
$A \subseteq B$	$\forall x\, A(x) \Rightarrow B(x)$	Tout élément de A est un élément de B
$A = B$	$\forall x\, A(x) \Leftrightarrow B(x)$	A et B ont exactement les mêmes éléments
$A = \emptyset$	$\forall x\, \neg A(x)$	A n'a pas d'élément
$A \neq \emptyset$	$\exists x\, A(x)$	A a au moins un élément
$B = \{x \in A \mid \mathcal{P}(x)\}$	$\forall x\, B(x) \Leftrightarrow A(x) \wedge \langle \mathcal{P}(x) \rangle$	Les éléments de B sont exactement les éléments de A qui vérifient $\mathcal{P}$
$\exists!\, x \in A, \mathcal{P}(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge \langle \mathcal{P}(x) \rangle \wedge (\forall y\, A(y) \wedge \langle \mathcal{P}(y) \rangle \Rightarrow x = y))$	Exactement un élément de A vérifie $\mathcal{P}$

Cas particulier des définitions : Il est habituel lorsqu'on *définit* une notion, notamment en mathématiques, d'utiliser un simple « si » pour signifier « si et seulement si », ou le verbe être pour indiquer l'égalité plutôt que l'inclusion. Une définition se traduit toujours par une formule universelle utilisant le prédicat à définir et $\Leftrightarrow$. Souvent, on indique qu'il s'agit d'une définition soit explicitement (« Définition : ») soit implicitement en utilisant le verbe dire ou le verbe appeler. Par exemple :

— « Déf. : un nombre pair est un nombre divisible par 2 » : $\forall x\, \mathit{Pair}(x) \Leftrightarrow \mathit{Divisible}(x, 2)$
— « Un nombre est dit positif s'il est supérieur ou égal à 0 » : $\forall x\, \mathit{Pos}(x) \Leftrightarrow \mathit{Supoueg}(x, 0)$

Pour les phrases avec le verbe être, les articles sont importants :
— « Les A sont *des* B » : ne peut pas être une définition, c'est une inclusion.
— « Les A sont *les* B » : c'est une définition.
— « *Tout* A est un B » : n'est *a priori* pas une définition.
— « *Un* A est un B » : ambigu. Peut être une définition ou non.

Parfois il peut ne pas être clair s'il s'agit d'une définition ou non, dans ce cas la phrase doit être considérée comme ambiguë (la solution est donc de vérifier avec l'auteur de la phrase ce qu'il veut dire exactement). Dans le doute, si on ne peut pas vérifier, il vaut mieux éviter de surinterpréter (donc considérer qu'il ne s'agit pas d'une définition).