Exercices de logique — feuille 5

Exercice 31. Formaliser en logique du premier ordre les phrases suivantes, puis montrer en utilisant le système de Fitch que la dernière phrase est une conséquence des autres. Le domaine du discours est l'ensemble des animaux. On considère qu'il est question d'une seule course, ainsi par exemple le fait d'avoir participé ou non à la course peut être représenté par un prédicat d'arité 1.

1. Les lièvres courent au moins aussi vite que les chats.
2. Aucune tortue ne court aussi vite que Félix.
3. Pour qu'un animal gagne la course, il faut qu'il coure au moins aussi vite que tous ceux qui sont partis à point.
4. Félix est un chat et n'a pas participé à la course.
5. Un lièvre a participé mais une tortue a gagné la course.
6. « Courir au moins aussi vite que » est une relation de préordre.
7. Les participants à la course ne sont pas tous partis à point.

Exercice 32. On considère un langage du premier ordre de signature $\Sigma = (\emptyset, \{P^3, Q^4\})$, et les deux théories suivantes sur ce langage :

— $\mathcal{T}_1$ est définie par les trois axiomes suivants :
  — $\exists x \exists y \exists z\, P(x, y, z)$
  — $\forall x \forall y\, \neg P(x, x, y)$
  — $\forall x \forall y \forall z\, P(x, y, z) \Rightarrow P(y, z, x)$

— $\mathcal{T}_2$ est définie par les trois axiomes suivants :
  — $\exists w \exists x \exists y \exists z\, Q(w, x, y, z)$
  — $\forall x \forall y \forall z\, \neg Q(x, x, y, z)$
  — $\forall w \forall x \forall y \forall z\, Q(w, x, y, z) \Rightarrow Q(x, y, z, w)$

1. Démontrer que ni $\mathcal{T}_1$ ni $\mathcal{T}_2$ ne possèdent un modèle à un seul élément.
2. Donner une réalisation du langage, sur un domaine à quatre éléments, qui satisfait à la fois $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.
3. Quel est le plus petit nombre d'éléments possible pour un modèle de $\mathcal{T}_1$? Pour un modèle de $\mathcal{T}_2$? justifier vos réponses.

Exercice 33. On considère le langage de l'axiomatique de Peano auquel on ajoute le symbole de relation binaire $\leqslant^2$. On ajoute à la théorie l'axiome suivant afin de *définir* la relation $\leqslant$:

$$\forall x \forall y\ (x \leqslant y) \Leftrightarrow \exists z\, (x + z = y)$$

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble d'axiomes résultant. On se place dans la théorie $\mathbb{P}$: « on a φ » signifie « φ est un théorème de $\mathbb{P}$ ».

1. On admet que l'addition est associative, c'est-à-dire qu'on a $\forall *\ (x + (y + z) = (x + y) + z)$.
   Montrer que $\leqslant$ est une relation de préordre, en utilisant le système de Fitch.
2. (a) En utilisant l'axiome de récurrence, montrer qu'on a $\forall x \forall y\, (x + y = x) \Rightarrow (y = 0)$.
   (b) Montrer qu'on a $\forall x \forall y\, (x + y = 0) \Rightarrow (x = 0)$.
3. En déduire que $\leqslant$ est une relation d'ordre.

Exercice 34.

1. Formaliser en logique du premier ordre les phrases suivantes. Le domaine du discours est l'ensemble des animaux. (Il est donc sous-entendu que les licornes sont des animaux.)
   (a) Tout animal tacheté plus grand qu'une licorne est une girafe.
   (b) Les girafes ne sont pas des fauves.
   (c) Toutes les panthères sont des fauves, et certaines sont tachetées.
   (d) « plus grand que » est une relation d'ordre strict.
   (e) Les licornes ne sont pas des oiseaux.
   (f) Les panthères sont plus grandes que Félix.
   (g) Si un animal volant n'a pas plus de pattes que Félix, alors c'est un oiseau.
   (h) Tous les animaux qui ont plus de pattes que Félix sont plus petits que lui.
2. Déduire de ces phrases, en utilisant le système de Fitch, que : *Les licornes ne peuvent pas voler.* L'utilisation des règles d'équivalence est autorisée.

Exercice 35. On considère la théorie du premier ordre dont le langage comprend uniquement un prédicat binaire P^2 et dont les trois axiomes sont :

— P est irréflexive
— P est symétrique
— $\forall x \exists y \, P(x, y)$

1. Pouvez-vous donner un modèle de cette théorie dont le domaine a un seul élément ? deux éléments ? trois éléments ? (pour chacun des cas, si oui, décrire ce modèle, sinon, expliquer pourquoi).
2. Montrer en utilisant le système de Fitch que la formule
   $\forall x \forall y \, P(x, y) \Rightarrow \exists z \, P(y, z) \wedge \neg P(x, z)$ est une conséquence logique de cette théorie.
3. On ajoute à la théorie le prédicat d'égalité et l'axiome suivant :
   $\forall x \forall y \forall z \, (P(x, y) \wedge P(x, z)) \Rightarrow y = z$.
   La théorie a-t-elle toujours un modèle de cardinal 3 ? pouvez-vous caractériser l'ensemble des cardinaux possibles pour son domaine du discours ? En d'autres termes : étant donné un entier n, pouvez-vous dire si la théorie possède un modèle de cardinal n ? Justifier.

Exercice 36.

1. Formaliser en logique du premier ordre les phrases suivantes. Le domaine du discours comprend les arrêts et les lignes de tram. On parlera d'*objet* quand on souhaite ne pas préciser s'il s'agit d'un arrêt ou d'une ligne (cela permet d'avoir des formules plus simples quand la précision est inutile).
   On appelle *correspondance* entre deux lignes un arrêt qui est sur les deux lignes à la fois.
   (a) Tout arrêt est sur au moins une ligne.
   (b) Si deux objets sont sur un même objet, alors ils sont reliés.
   (c) « être reliés » est une relation d'équivalence.
   (d) Il y a des correspondances entre la ligne B et toutes les lignes.
   (e) Deux arrêts quelconques sont toujours reliés.
2. En utilisant le système de Fitch, montrer que la phrase (e) est une conséquence des phrases (a) à (d).