Exercices de logique — feuille 4

Exercice 22. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules du premier ordre ? pour celles qui le sont, indiquer une signature possible pour le langage auquel ces formules appartiennent.

1. $(P \Rightarrow \neg Q)$
2. $(P(a) \Rightarrow \neg P(a, b))$
3. $(\forall x \Rightarrow Q)$
4. $\forall x\, P$
5. $\forall x\, y\, P(x, y)$
6. $\forall x\, \exists x\, P(x, y)$
7. $(P(x) \Rightarrow \neg \exists x\, P(y))$
8. $(P(f(a, x)) \wedge \neg P(a, f(x)))$
9. $\forall f\, P(f(a))$
10. $P(f(x, y), g(a), g(f(g(x), f(f(g(a), f(y, b)), g(y)), f(x, g(b)))))$
11. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \Rightarrow P(x, z))$

Exercice 23. La logique propositionnelle est-elle représentable par un langage du premier ordre ? expliquer comment.

Exercice 24. Définir un langage du premier ordre permettant de représenter par des formules les affirmations suivantes (on supposera que le domaine du discours est l'ensemble des animaux) :

1. Aucun animal volant n'est quadrupède
2. Les souris sont quadrupèdes
3. Les éléphants sont plus gros que tous les autres quadrupèdes
4. Les hiboux peuvent manger les souris
5. Les éléphants ont peur des souris
6. Dumbo est un éléphant
7. Dumbo vole
8. Les animaux ont peur de ceux qui peuvent les manger
9. Un animal ne peut manger que des animaux plus petits que lui
10. Un animal est froussard s'il a peur d'un animal qui ne peut pas le manger

À votre avis, peut-on déduire de ces phrases (et de ces phrases seulement) :
— que les hiboux sont plus gros que les souris ?
— qu'il existe un éléphant froussard ?

Si vous pensez que non, donnez un contre-exemple, c'est-à-dire une réalisation du langage où les hypothèses sont vraies mais la conclusion est fausse. Dans ce cas, quelles hypothèses raisonnables pourrait-on ajouter pour rendre les déductions correctes ?

Exercice 25.

1. Donner un modèle de $\forall x\, P(g(x, f(x)), a)$.
2. Donner un modèle et un contre-modèle de $\forall x \forall y\, P(f(x, y), a) \Rightarrow P(x, y)$.
3. Donner un contre-modèle de $\forall x \forall y \forall z\, P(x, y) \Rightarrow P(f(x, z), f(y, z))$.
4. Donner un contre-modèle de $\forall x \forall y\, P(f(x, a), y) \Rightarrow P(f(y, a), x)$.
5. Donner un modèle et un contre-modèle de :
$\forall x \forall y\, (P(x, y) \wedge \neg Q(x, y)) \Rightarrow \exists z\, P(x, z) \wedge \neg Q(z, x) \wedge P(z, y) \wedge \neg Q(z, y)$.

Exercice 26. Pour chacune des paires de formules suivantes, montrer que les deux formules **ne sont pas équivalentes** en général, et indiquer si on a néanmoins une relation de conséquence dans un sens :

1. $\forall x \exists y\, \varphi$ et $\exists y \forall x\, \varphi$,
2. $(\forall x\, \varphi) \vee (\forall x\, \psi)$ et $\forall x\, \varphi \vee \psi$,

3. $(\exists x\, \varphi) \wedge (\exists x\, \psi)$ et $\exists x\, \varphi \wedge \psi$,

Exercice 27.

1. On considère la formule $\varphi = \forall x \exists y\, P(x, y)$. Quelles interprétations parmi les suivantes sont des modèles de φ ?
   — $D = \mathbb{N}$ et $\mathrm{I}(P)$ est la relation $<$
   — $D = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{I}(P)$ est la relation $>$
   — $D = \mathbb{N}$ et $\mathrm{I}(P)$ est la relation $>$
2. Soit la formule $\varphi = \forall x \exists y \forall z\, (P(x, z) \Rightarrow P(f(z), y))$.
   Si $D = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{I}(P)$ est la relation $\leqslant$, comment peut-on choisir $\mathrm{I}(f)$ pour que $(D, \mathrm{I}) \models \varphi$? Et si $D = \mathbb{N}$?

Exercice 28. On dit qu'un modèle est *fini* ou *infini* si son domaine du discours l'est.

1. Soit la formule : $(\forall x \exists y\, \neg P(x, y)) \wedge \forall x \forall y \forall z\, P(x, y) \vee P(y, z) \vee P(x, z)$.
   — En donner un modèle dont le domaine est $\mathbb{R}$.
   — En donner un modèle dont le domaine est $\{1, 2\}$.
   — Cette formule possède-t-elle un modèle à un seul élément ?
2. Soit la formule : $(\forall x\, \neg P(x, x)) \wedge (\forall x\, P(x, f(x))) \wedge (\forall x \forall y \forall z\, P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z))$. Pouvez-vous en donner un modèle fini ? un modèle infini ?

Exercice 29.

1. Formaliser en logique du premier ordre les phrases suivantes, en précisant la signature utilisée et l'interprétation voulue des différents symboles. Le jour est le contraire de la nuit et coloré est le contraire de gris.
   (a) Médor remarque tout ce qui est coloré.
   (b) Médor est un chien.
   (c) Les chiens pourchassent les chats qu'ils remarquent.
   (d) Médor ne pourchasse des chats que le jour.
   (e) La nuit, tous les chats sont gris.
2. En utilisant le système de Fitch, démontrer que la phrase (e) est une conséquence des phrases (a) à (d).

Exercice 30.

1. Formaliser en logique du premier ordre les énoncés suivants (on considère que le domaine du discours est l'ensemble des animaux) :
   (a) Seuls des invertébrés ont plus de pattes qu'un chat
   (b) Les chats et les oiseaux sont tous vertébrés
   (c) Aucun animal n'a moins de pattes qu'un poisson
   (d) Félix est un chat
   (e) Maya peut voler
   (f) Maya a plus de pattes que Félix
2. Démontrer en utilisant le système de Fitch que ces énoncés ont pour conséquences :
   (a) que les animaux volants ne sont pas tous des oiseaux
   (b) que Maya n'est pas un poisson