Exercices de logique — feuille 1

Exercice 1. On dit qu'un ensemble de connecteurs logiques est *complet* ou *adéquat* s'il permet de représenter toutes les fonctions de vérité.

Une fonction de vérité f quelconque à n arguments peut être décrite par sa table de vérité, qui indique pour chacun des 2^n n-uplets de valeur de vérité possibles quel est le résultat de f appliquée à ce n-uplet.

On représente les n arguments de f par n symboles de proposition $P_1, \ldots, P_n$ et on cherche à construire une formule ayant la même table de vérité.

1. Supposons que f est vraie dans un seul cas (une seule ligne de la table de vérité). On note $k_1 \ldots k_i$ les numéros des variables qui sont à **V** sur cette ligne, $l_1 \ldots l_j$ les numéros de celles qui sont à **F**. Pouvez-vous écrire une formule qui correspond à la fonction f ?
2. Appelons φ_m la formule qui est vraie uniquement à la ligne m, construite comme à la question précédente. On suppose maintenant que f est vraie exactement aux lignes $m_1 \ldots m_p$ et fausse dans les autres cas. Pouvez-vous écrire une formule qui correspond à f ?
3. Supposons que f est toujours fausse. Pouvez-vous écrire une formule qui correspond à f sans utiliser $\perp$?
4. En déduire que l'ensemble de connecteurs $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est adéquat.
5. En utilisant la question précédente, montrer que les ensembles suivants sont également adéquats :
   (a) $\{\wedge, \neg\}$
   (b) $\{\vee, \neg\}$
   (c) $\{\Rightarrow, \neg\}$
   (d) le connecteur non-et (NAND) : $\uparrow$
   (e) le connecteur non-ou (NOR) : $\downarrow$
   (f) le connecteur ternaire ? : (si-alors-sinon) et les deux « connecteurs » d'arité 0 (c'est-à-dire sans arguments) $\top$ (toujours vrai) et $\perp$ (toujours faux).

   les connecteurs supplémentaires étant définis de la façon suivante :

φ	ψ	$\varphi \uparrow \psi$	$\varphi \downarrow \psi$	$\varphi\,?\,\psi : \chi$
V	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	χ
F	**F**	**V**	**V**	χ

Exercice 2. Donner les tables de vérité des formules suivantes :

1. $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
2. $\neg P \vee Q$
3. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$
4. $P \Rightarrow \neg P$
5. $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

Exercice 3. La formule suivante est-elle valide ? est-elle satisfaisable ?

$$((((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg R)) \wedge (R \Rightarrow P)) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (S \Rightarrow (R \vee T))$$

Peut-on évaluer à **F** la formule suivante ?

$$((((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg R \Rightarrow \neg S)) \Rightarrow R) \Rightarrow T) \Rightarrow ((T \Rightarrow P) \Rightarrow (S \Rightarrow P))$$

Exercice 4. Vérifier que les formules suivantes sont des tautologies :

1. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
2. $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
3. $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

Exercice 5. On considère l'ensemble $\mathcal{I}$ de toutes les interprétations de la logique propositionnelle. À toute formule φ on associe l'ensemble $[\![\varphi]\!]$ de ses modèles, c'est-à-dire l'ensemble $\{\mathrm{I} \in \mathcal{I} \mid \mathrm{I} \models \varphi\}$.

1. Comment se traduit le fait que φ soit satisfaisable ? valide ?
2. À quoi correspond la relation $\varphi \models \psi$?
3. En fonction de $[\![\varphi]\!]$ et $[\![\psi]\!]$, que valent :
   — $[\![\varphi \wedge \psi]\!]$?
   — $[\![\varphi \vee \psi]\!]$?
   — $[\![\neg\varphi]\!]$?
   — $[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]$?
4. Que peut-on dire de $[\![\varphi]\!]$ et $[\![\psi]\!]$ si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$?

Exercice 6. Trouvez-vous le raisonnement suivant correct ? pourquoi ?

Si la vie a un sens mais finit inéluctablement par la mort alors la vie est triste.
Si la vie continue après la mort mais n'a pas de sens alors la vie est une blague cosmique.
Si la vie avait un sens et continuait après la mort alors l'angoisse n'existerait pas.
Si la vie n'est pas une blague cosmique alors elle n'est pas triste.
L'angoisse existe.
Si la vie est triste ou est une blague cosmique alors elle n'est pas belle.
Par conséquent la vie est moche.

Exercice 7. Les raisonnements suivants sont-ils corrects ?

$$\frac{\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ P \Rightarrow R \\ \neg(Q \wedge R) \end{array}}{S} \qquad \frac{\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow S \\ \neg S \\ P \vee T \end{array}}{T}$$

Exercice 8. Le raisonnement suivant est-il correct ?

S'il y a une norme unique pour juger de la grandeur en art, alors M et G ne peuvent pas être tous deux de grands artistes. Si P ou D sont considérés comme de grands artistes, alors W n'en est certainement pas un. Mais si W n'est pas un grand artiste, alors K et S ne le sont pas non plus. Après tout, G n'est pas un grand artiste, mais D et K le sont.

Donc, il n'y a pas une norme unique pour juger de la grandeur en art.

Exercice 9. Soit un raisonnement donné par un ensemble d'hypothèses et une conclusion en logique propositionnelle. On note $Prop(\Phi)$ l'ensemble des propositions atomiques apparaisant dans un ensemble Φ de formules. Supposons $Prop(\text{hypothèses}) \cap Prop(\text{conclusion}) = \emptyset$. Le raisonnement peut-il être correct ?

Exercice 10. Il y a eu un crime dans une luxueuse demeure et l'inspecteur de police chargé de l'enquête fait le raisonnement suivant :

Si le jour du crime quelqu'un avait posé à la bonne la question : « pourquoi n'étiez-vous pas au dîner avant-hier soir ? », elle aurait répondu.

Si elle avait répondu, quelqu'un l'aurait entendue.

La bonne n'a pas été entendue.

Si la bonne n'a pas été vue ni entendue, c'est qu'elle polissait l'argenterie, et si elle polissait l'argenterie, alors elle était présente le jour du crime.

Je conclus donc que la bonne était présente le jour du crime.

1. Pour que le raisonnement soit correct, quelles hypothèses l'inspecteur aurait-il dû expliciter ?
2. Y a-t-il une seule possibilité ?
3. En ajoutant des hypothèses à un raisonnement correct, peut-on le rendre incorrect ?

Exercice 11. En supposant $\varphi \not\models \chi$ et $\varphi \wedge \psi \models \chi$, laquelle des deux assertions suivantes est correcte ?

1. $\varphi \models \psi$
2. $\varphi \not\models \psi$