Correction de l'exercice 28 (Q2)

On a $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ avec :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \, \neg P(x, x) \\
\varphi_2 &= \forall x \, P(x, f(x)) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z \, P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z)
\end{aligned}$$

On souhaite démontrer que φ n'a pas de modèle fini.

Première étape : on montre que si une réalisation $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ est telle que $\mathrm{I}(f)^k(d) = d$ pour un certain $d \in \mathcal{D}$ et un certain $k \geqslant 1$, alors $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \not\models \varphi$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

On a $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ avec :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x\, \neg P(x, x) \\
\varphi_2 &= \forall x\, P(x, f(x)) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z\, P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z)
\end{aligned}$$

On souhaite démontrer que φ n'a pas de modèle fini.

Première étape : on montre que si une réalisation $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ est telle que $\mathrm{I}(f)^k(d) = d$ pour un certain $d \in \mathcal{D}$ et un certain $k \geqslant 1$, alors $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \not\models \varphi$.

Deuxième étape : soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ une réalisation avec $\mathcal{D}$ fini de cardinal n, et soit $d \in \mathcal{D}$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

On a $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ avec :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \, \neg P(x,x) \\
\varphi_2 &= \forall x \, P(x, f(x)) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z \, P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)
\end{aligned}$$

On souhaite démontrer que φ n'a pas de modèle fini.

Première étape : on montre que si une réalisation $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ est telle que $\mathrm{I}(f)^k(d) = d$ pour un certain $d \in \mathcal{D}$ et un certain $k \geqslant 1$, alors $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \not\models \varphi$.

Deuxième étape : soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ une réalisation avec $\mathcal{D}$ fini de cardinal n, et soit $d \in \mathcal{D}$.

Alors $d, \mathrm{I}(f)(d), \mathrm{I}(f)(\mathrm{I}(f)(d)), \ldots, \mathrm{I}(f)^n(d)$ ne peuvent pas être tous différents (ce sont $n+1$ éléments de $\mathcal{D}$).

Correction de l'exercice 28 (Q2)

On a $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ avec :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \, \neg P(x, x) \\
\varphi_2 &= \forall x \, P(x, f(x)) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z \, P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z)
\end{aligned}$$

On souhaite démontrer que φ n'a pas de modèle fini.

Première étape : on montre que si une réalisation $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ est telle que $\mathrm{I}(f)^k(d) = d$ pour un certain $d \in \mathcal{D}$ et un certain $k \geqslant 1$, alors $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \not\models \varphi$.

Deuxième étape : soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ une réalisation avec $\mathcal{D}$ fini de cardinal n, et soit $d \in \mathcal{D}$.

Alors $d, \mathrm{I}(f)(d), \mathrm{I}(f)(\mathrm{I}(f)(d)), \ldots, \mathrm{I}(f)^n(d)$ ne peuvent pas être tous différents (ce sont $n + 1$ éléments de $\mathcal{D}$).

il existe donc k_1 et k_2, avec $k_1 < k_2$, tels que $\mathrm{I}(f)^{k_1}(d) = \mathrm{I}(f)^{k_2}(d)$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

On a $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ avec :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \, \neg P(x,x) \\
\varphi_2 &= \forall x \, P(x, f(x)) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z \, P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)
\end{aligned}$$

On souhaite démontrer que φ n'a pas de modèle fini.

Première étape : on montre que si une réalisation $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ est telle que $\mathrm{I}(f)^k(d) = d$ pour un certain $d \in \mathcal{D}$ et un certain $k \geqslant 1$, alors $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \not\models \varphi$.

Deuxième étape : soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ une réalisation avec $\mathcal{D}$ fini de cardinal n, et soit $d \in \mathcal{D}$.

Alors $d, \mathrm{I}(f)(d), \mathrm{I}(f)(\mathrm{I}(f)(d)), \ldots, \mathrm{I}(f)^n(d)$ ne peuvent pas être tous différents (ce sont $n+1$ éléments de $\mathcal{D}$).

il existe donc k_1 et k_2, avec $k_1 < k_2$, tels que $\mathrm{I}(f)^{k_1}(d) = \mathrm{I}(f)^{k_2}(d)$.

En posant $d' = \mathrm{I}(f)^{k_1}(d)$ et $k = k_2 - k_1$, on a donc $\mathrm{I}(f)^k(d') = d'$, et $k \geqslant 1$, donc d'après l'étape 1, $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \not\models \varphi$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.On pose $\mathsf{f} = \mathrm{I}(f)$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.On pose $\mathsf{f} = \mathrm{I}(f)$.
Comme $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi$, on a :

a. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_1$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, d) \notin \mathrm{I}(P)$.

b. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_2$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, \mathsf{f}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

c. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_3$ donc si $(d_1, d_2) \in \mathrm{I}(P)$ et $(d_2, d_3) \in \mathrm{I}(P)$ alors $(d_1, d_3) \in \mathrm{I}(P)$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.On pose $\mathsf{f} = \mathrm{I}(f)$.
Comme $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi$, on a :

a. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_1$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, d) \notin \mathrm{I}(P)$.

b. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_2$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, \mathsf{f}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

c. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_3$ donc si $(d_1, d_2) \in \mathrm{I}(P)$ et $(d_2, d_3) \in \mathrm{I}(P)$ alors $(d_1, d_3) \in \mathrm{I}(P)$.

On montre d'abord par récurrence sur k que :
pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$, $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.On pose $\mathrm{f} = \mathrm{I}(f)$.
Comme $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi$, on a :

a. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_1$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, d) \notin \mathrm{I}(P)$.
b. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_2$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, \mathrm{f}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.
c. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_3$ donc si $(d_1, d_2) \in \mathrm{I}(P)$ et $(d_2, d_3) \in \mathrm{I}(P)$ alors $(d_1, d_3) \in \mathrm{I}(P)$.

On montre d'abord par récurrence sur k que :
pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$, $(d, \mathrm{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

- Initialisation $(k = 1)$: c'est la propriété b.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.On pose $\mathsf{f} = \mathrm{I}(f)$.
Comme $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi$, on a :

a. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_1$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, d) \notin \mathrm{I}(P)$.

b. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_2$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, \mathsf{f}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

c. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_3$ donc si $(d_1, d_2) \in \mathrm{I}(P)$ et $(d_2, d_3) \in \mathrm{I}(P)$ alors $(d_1, d_3) \in \mathrm{I}(P)$.

On montre d'abord par récurrence sur k que :
pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$, $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

- Initialisation $(k = 1)$: c'est la propriété b.
- Hérédité : supposons $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.On pose $\mathsf{f} = \mathrm{I}(f)$.
Comme $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi$, on a :

a. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_1$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, d) \notin \mathrm{I}(P)$.
b. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_2$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, \mathsf{f}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.
c. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_3$ donc si $(d_1, d_2) \in \mathrm{I}(P)$ et $(d_2, d_3) \in \mathrm{I}(P)$ alors $(d_1, d_3) \in \mathrm{I}(P)$.

On montre d'abord par récurrence sur k que :
pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$, $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

- Initialisation $(k = 1)$: c'est la propriété b.
- Hérédité : supposons $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.
  D'après b. on a $(\mathsf{f}^k(d), \mathsf{f}^{k+1}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.On pose $\mathsf{f} = \mathrm{I}(f)$.
Comme $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi$, on a :

a. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_1$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, d) \notin \mathrm{I}(P)$.

b. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_2$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, \mathsf{f}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

c. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_3$ donc si $(d_1, d_2) \in \mathrm{I}(P)$ et $(d_2, d_3) \in \mathrm{I}(P)$ alors $(d_1, d_3) \in \mathrm{I}(P)$.

On montre d'abord par récurrence sur k que :
pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$, $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

- Initialisation $(k = 1)$: c'est la propriété b.
- Hérédité : supposons $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.
  D'après b. on a $(\mathsf{f}^k(d), \mathsf{f}^{k+1}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.
  Donc d'après c. on a également $(d, \mathsf{f}^{k+1}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

Correction de l'exercice 28 (Q2)

Pour l'étape 1 on prouve la contraposée :
soit $(\mathcal{D}, \mathrm{I})$ un modèle de φ, alors pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{I}(f)^k(d) \neq d$.On pose $\mathsf{f} = \mathrm{I}(f)$.
Comme $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi$, on a :

a. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_1$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, d) \notin \mathrm{I}(P)$.

b. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_2$ donc pour tout $d \in \mathcal{D}$, $(d, \mathsf{f}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

c. $(\mathcal{D}, \mathrm{I}) \models \varphi_3$ donc si $(d_1, d_2) \in \mathrm{I}(P)$ et $(d_2, d_3) \in \mathrm{I}(P)$ alors $(d_1, d_3) \in \mathrm{I}(P)$.

On montre d'abord par récurrence sur k que :
pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $k \geqslant 1$, $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

- Initialisation $(k = 1)$: c'est la propriété b.
- Hérédité : supposons $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$.
  D'après b. on a $(\mathsf{f}^k(d), \mathsf{f}^{k+1}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.
  Donc d'après c. on a également $(d, \mathsf{f}^{k+1}(d)) \in \mathrm{I}(P)$.

On conclut ensuite en utilisant la propriété a : $(d, \mathsf{f}^k(d)) \in \mathrm{I}(P)$ mais $(d, d) \notin \mathrm{I}(P)$, donc $d \neq \mathsf{f}^k(d)$.