

Règles du système de Fitch (logique propositionnelle)

Règles de base

— Conjonction :

$$\text{IC} \frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \quad \text{EC}_1 \frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_1} \quad \text{EC}_2 \frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_2}$$

— Disjonction :

$$\text{ID}_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_1 \vee \varphi_2} \quad \text{ID}_2 \frac{\varphi_2}{\varphi_1 \vee \varphi_2} \quad \text{ED} \frac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \varphi_1 \Rightarrow \psi \quad \varphi_2 \Rightarrow \psi}{\psi}$$

— Négation :

$$\text{IN} \frac{\varphi \Rightarrow \perp}{\neg \varphi} \quad \text{EN} \frac{\neg \neg \varphi}{\varphi}$$

— Contradiction (Faux) :

$$\text{IF} \frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} \quad \text{EF} \frac{\perp}{\varphi}$$

— Implication :

$$\text{II} \frac{\varphi \vdash \psi^1}{\varphi \Rightarrow \psi} \quad \text{EI} \frac{\varphi \Rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}$$

— Connecteur d'équivalence :

$$\text{IE} \frac{\varphi \Rightarrow \psi \quad \psi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Leftrightarrow \psi} \quad \text{EE}_1 \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi}{\varphi \Rightarrow \psi} \quad \text{EE}_2 \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi}$$

Règles dérivées (qu'on peut prouver à partir des règles de base)

— Variantes de ED (élimination de la disjonction) :

$$\frac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2}{\varphi_2} \quad \frac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \neg \varphi_1}{\varphi_2}$$

— Variante de EI (contraposition) :

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \varphi}$$

— Tautologies de base :

$$\frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi} \quad (\text{auto-implication}) \quad \frac{}{\varphi \vee \neg \varphi} \quad (\text{tiers-exclu})$$

— Règles d'équivalence : toutes les règles mais les plus utiles sont :

$$\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg \varphi \wedge \neg \psi} \quad \frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg \varphi \vee \neg \psi} \quad (\text{De Morgan}) \quad \frac{\neg \varphi \vee \psi}{\varphi \Rightarrow \psi} \quad (\text{trad. impl.}) \quad \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\neg \psi \Rightarrow \neg \varphi} \quad (\text{contraposition})$$

1. On rappelle que $\varphi \vdash \psi$ représente une sous-preuve indentée dont l'hypothèse locale initiale est φ et la conclusion ψ .