

Aide-mémoire de logique n° 2 – Formes normales, systèmes formels

Formes normales

Une formule de la logique propositionnelle est en *forme normale négative* si le connecteur \neg n'apparaît que devant des propositions atomiques (jamais devant une parenthèse).

Un *littéral* est une formule de la forme P ou $\neg P$, avec P proposition atomique. Un littéral de la forme P sera dit *positif*, un littéral de la forme $\neg P$ sera dit *négatif*. Le *complémentaire* d'un littéral est le littéral de signe opposé.

Une *clause* est une disjonction de littéraux. Parfois on définira plutôt une clause comme un *ensemble* de littéraux, puisque l'ordre des littéraux est sans importance et que répéter un littéral n'ajoute rien. Une clause positive (resp. négative) est une clause ne contenant que des littéraux positifs (resp. négatifs).

Une *clause de Horn* est une clause contenant *au plus* un littéral positif.

Une formule de la logique propositionnelle est en *forme normale conjonctive* si c'est une conjonction de clauses, c'est-à-dire qu'elle est de la forme $\bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^{k_i} L_i^j$ où les L_i^j sont des littéraux. De même que les clauses peuvent être vues comme des ensembles de littéraux, une forme normale conjonctive peut être vue comme un ensemble de clauses.

On utilisera la convention que la conjonction vide (obtenue dans la formule ci-dessus si $n = 0$) est une formule toujours vraie (une forme normale conjonctive est satisfaite quand **toutes** ses clauses sont satisfaites, s'il n'y a aucune clause on considère que c'est vérifié).

Inversement, la disjonction vide ou *clause vide* (obtenue ci-dessus si $k_i = 0$ pour un certain i) sera considérée comme toujours fausse (une clause est satisfaite quand l'un au moins de ses littéraux est vrai, s'il n'y a aucun littéral c'est impossible). La clause vide pourra être notée \perp .

Une formule de la logique propositionnelle est en *forme normale disjonctive* si c'est une disjonction de conjonctions de littéraux, c'est-à-dire qu'elle est de la forme $\bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_i^j$.

Systèmes formels

Un système formel est un triplet $(\mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ où :

- \mathcal{L} est un langage sur un vocabulaire fini, défini par des règles syntaxiques (les formules doivent aussi être de longueur finie)
 - $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ est défini par un nombre fini de *schémas d'axiomes*
 - $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}_f(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ (\mathcal{P}_f : ens. des parties finies) est défini par un nombre fini de *schémas de règles d'inférences*
- \mathcal{A} et \mathcal{R} sont les ensembles de toutes les *instances* possibles des axiomes et des règles d'inférences, obtenues en remplaçant les variables des schémas par des formules.

Une *déduction* dans un système formel $\mathcal{S} = (\mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ d'une formule $\mathcal{C} \in \mathcal{L}$ (*conclusion*) à partir d'un ensemble de formules $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ (*hypothèses*) est une suite **finie** d'**instances** de règles d'inférence $R_1, \dots, R_n \in \mathcal{R}$ telle que :

- \mathcal{C} est la conclusion de R_n (ou bien $\mathcal{C} \in \Gamma \cup \mathcal{A}$ si $n = 0$)
- pour tout i , chaque prémisses de R_i est :
 - soit une instance d'axiome (un élément de \mathcal{A}),
 - soit une hypothèse (un élément de Γ),
 - soit la conclusion d'une règle R_j avec $j < i$.

On écrit $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C}$ s'il existe une déduction allant de Γ à \mathcal{C} dans le système \mathcal{S} . (On pourra écrire \vdash sans le \mathcal{S} s'il n'y a pas d'ambiguïté quant au système dont on parle.)

Une *démonstration* est une déduction sans hypothèse.

Un *théorème* de \mathcal{S} est une formule \mathcal{T} telle que $\vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{T}$.

Un système formel est dit *consistant* ou *cohérent* s'il ne permet jamais de prouver à la fois une formule et sa négation. Il est dit *absolument consistant* s'il existe au moins une formule du langage qui n'est pas un théorème.

Étant donné un système formel et une sémantique pour son langage (c'est-à-dire une définition de \models pour les formules de ce langage), on dira que le système est (relativement à cette sémantique) :

- *correct* si $\Gamma \vdash \mathcal{C}$ implique $\Gamma \models \mathcal{C}$ pour tout ensemble de formules Γ et toute formule \mathcal{C} ;
- *complet* si $\Gamma \models \mathcal{C}$ implique $\Gamma \vdash \mathcal{C}$.

Remarque : comme, dans une déduction, les prémisses de chaque règle d'inférence sont toujours les résultats d'une déduction plus courte (car soit ce sont des axiomes ou des hypothèses, soit ils ont été obtenus comme conclusion d'une règle d'inférence appliquée **avant**), et comme d'autre part les déductions sont toujours de longueur finie, il est possible, en raisonnant par récurrence sur la longueur des déductions, d'énoncer le **principe général d'induction** suivant :

Toute propriété qui est vraie des axiomes et est préservée par les règles d'inférence est vraie des théorèmes.

Par exemple, il suffit pour montrer qu'un système est correct de montrer que ses axiomes sont valides et que ses règles d'inférence sont correctes.