Aide-mémoire de logique n$^{\text{o}}$ 1 – Logique propositionnelle

Syntaxe

On se donne un ensemble infini dénombrable Π de *propositions atomiques* (notées $P, Q, R \ldots$). On définit par ailleurs les connecteurs binaires suivants :

conjonction (« et ») : $\wedge$

disjonction (« ou » inclusif) : $\vee$

implication (« si/alors ») : $\Rightarrow$

équivalence (« si et seulement si ») : $\Leftrightarrow$

ainsi que le connecteur unaire de **négation :** $\neg$ et les constantes $\top$ (toujours vrai) et $\bot$ (toujours faux).

Les formules de la logique propositionnelle sont toutes les formules (de longueur finie) obtenues à partir des propositions atomiques et des connecteurs ; une formule est bien formée (ou syntaxiquement correcte) si les connecteurs binaires séparent toujours deux formules elles-mêmes bien formées et que le connecteur de négation se situe toujours devant une formule bien formée. Pour éviter les ambiguïtés on utilise des parenthèses et l'ordre de priorité suivant :

1. négation
2. conjonction
3. disjonction
4. implication
5. équivalence

et pour un même connecteur la priorité à gauche. Ainsi par exemple $P \vee \neg Q \wedge R \vee S \Rightarrow T \Rightarrow \neg U$ représente la même formule que $((P \vee ((\neg Q) \wedge R) \vee S) \Rightarrow T) \Rightarrow (\neg U)$. Bien sûr il n'est pas interdit de mettre plus de parenthèses que strictement nécessaire.

L'ensemble des formules bien formées de la logique propositionnelle est noté $\mathcal{L}_0$. Dans la suite les formules seront toujours supposées bien formées. On notera les formules $\varphi, \psi, \chi \ldots$

Sémantique

Les propositions atomiques représentent des faits qui peuvent être vrais ou faux, autrement dit, à chaque proposition atomique on peut attribuer une *valeur de vérité* dans l'ensemble à deux éléments $\{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ (on peut aussi utiliser $\{0, 1\}$).

On attribue une valeur de vérité à chaque formule en fonction de la valeur de vérité des propositions atomiques qui la composent. Pour cela on attribue à chaque connecteur une *fonction de vérité* de $\{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}^n$ dans $\{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$, où n est l'*arité* du connecteur (1 ou 2 pour les connecteurs de base, mais on peut aussi définir des connecteurs ternaires ou davantage).

Ces fonctions sont représentées dans la *table de vérité* suivante :

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

Il est aussi possible de définir d'autres connecteurs binaires tels que XOR (ou exclusif, $\oplus$) dont la table de vérité est l'opposé de celle de $\Leftrightarrow$. Plus généralement, il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions de vérité binaires possibles.

Définitions

Une *interprétation* I de la logique propositionnelle est l'attribution à chaque proposition atomique d'une valeur de vérité, c'est-à-dire une fonction de Π dans $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. On notera $\mathcal{I}$ l'ensemble de toutes les interprétations possibles.

L'*évaluation* $\mathcal{E}(\varphi, \mathrm{I})$ d'une formule φ pour une interprétation I est la valeur de vérité obtenue pour φ en attribuant aux propositions atomiques les valeurs de I. $\mathcal{E}$ est donc une fonction de $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{I}$ dans $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$.

On dit qu'une interprétation I est un *modèle* d'une formule φ ou que I *satisfait* φ, et on écrit $\mathrm{I} \models \varphi$, si $\mathcal{E}(\varphi, \mathrm{I}) = \mathbf{V}$. Si $\mathcal{E}(\varphi, \mathrm{I}) = \mathbf{F}$, on dira que I est un *contre-modèle* ou *contre-exemple* de φ ou qu'elle *falsifie* φ, et on notera $\mathrm{I} \not\models \varphi$.

Une formule est dite *satisfaisable* si elle possède un modèle, c'est-à-dire s'il existe au moins une interprétation qui la satisfait.

Une formule φ est dite *valide* si **toute** interprétation la satisfait. On note alors $\models \varphi$. Une telle formule est appelée *tautologie*.

On dit que ψ est une *conséquence* de φ, et on écrit $\varphi \models \psi$, si tout modèle de φ est également un modèle de ψ. Plus généralement, si Φ et Ψ sont des ensembles de formules, on pourra écrire $\Phi \models \Psi$ pour dire que dès qu'une interprétation est un modèle de toutes les formules de Φ, c'est aussi un modèle de toutes les formules de Ψ.

On étend toutes ces définitions à des ensembles de formules : un ensemble Φ de formules est satisfaisable s'il existe une interprétation qui satisfait simultanément **toutes** les formules de Φ (attention, ce n'est pas la même chose que de dire que toutes les formules sont satisfaisables). Il est dit valide si toutes les formules qui le composent le sont.