Exercices de l'ancien temps
Recueil d'Exercices de Khôlles de Mathématiques

Damien Graux, Inria
damien.graux@inria.fr

27 *mars* 2015

Première partie

Analyse

Chapitre 1

Espaces Vectoriels Normés

1.1 Notions abordées dans ce chapitre

1. Normes : définition, équivalence entre normes...
2. Distances
3. Fonctions Lipschitziennes
4. Complétude
5. Théorème du point fixe (pour des fonctions k-contractantes)
6. Bases de topologie : ouverts, fermés, compacts

1.2 Questions de cours

- Les normes 1, 2 et infinie sur Kn, K[X] et C([a ;b],K) sont des normes.
- Une norme euclidienne est une norme.
- Linéarité des limites, unicité des limites pour les suites et les fonctions.
- Toute suite convergente est bornée.
- Convergence d'une suite et de ses suites coordonnées dans un evn de dimension finie. Version fonctionnelle.
- Réunion et intersection des ouverts et des fermés.
- Les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Caractérisation séquentielle d'un point adhérent.
- Composition des limites.
- Lipschitzienne implique continue (+savoir écrire lipschitzienne).
- Fonction continue sur un compact non vide et à valeurs dans R.
- Images réciproques des ouverts et des fermés par une fonction continue.

— Fonction linéaire d'un evn de dimension finie dans un evn de dimension finie.
— Les boules sont convexes.
— Les sphères sont des compacts.

1.3 Exercices

Le chapitre relatif aux EVN étant assez conséquent, les exercices seront découpés en plusieurs parties :

— Tout d'abord des exercices classiques traitant de normes
— Ensuite une étude de la complétude sera faite
— Puis des exercices d'analyse de fonctions
— Enfin des sujets de topologie

1.3.1 Autour des normes

Lipschitzienne et sa dérivée – ◷
Soit f une fonction dérivable sur intervalle réel et continue sur ce même intervalle fermé. Donner une CNS sur sa dérivée pour que f soit k-lipschitzienne.

On va montrer que f est k-lipschitzienne $\iff$ sa dérivée est bornée.

— Si f est k-lipschitzienne : $|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leq k, \forall x \neq y$. Par passage à la limite, on en déduit que la valeur absolue de la dérivée de f est elle aussi majorée par k.
— Et réciproquement, si la valeur absolue de la dérivée de f est majorée par k, f est k-lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis.

L'inégalité des accroissements finis : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec a et b réels et $a < b$) ; si :

— f est continue sur l'intervalle fermé [a,b]
— f est dérivable sur l'intervalle ouvert]a,b[
— $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k$

alors $|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}| \leq k$.

Un peu de topo : un contre-exemple – ⌚

Dans $\mathbb{R}$ par exemple, il y a équivalence en compact et fermé+borné (*résultat bien connu*) : les compacts sont donc les segments... Donner un exemple (en dimension infinie) d'un fermé borné **non** compact.

On peut par exemple prendre $\mathbb{R}[X]$ avec la norme $\|a_nX^n + ... + a_0\| = \sup(a_n, ..., a_0)$; la boule fermée de rayon 1 est un fermé borné. On pourra montrer que ce n'est pas un compact en regardant la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$...

On peut aussi regarder autour d'un théorème de Riesz (hors programme) affirmant que dans un espace vectoriel normé la boule unité fermée est un compact si et seulement si on est en dimension finie.

Une histoire de continuité simultanée

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel normé tels que : $fg - gf = Id$.

a) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $fg^n - g^nf$.

b) Montrer que f et g ne sont pas simultanément continus.

Notations classiques : $fg = f \circ g$ *et* $g^n = \underbrace{g \circ g \circ ... \circ g}_{nfois}$.

---

a) Par multiplication à gauche puis à droite de l'égalité donnée par g, on a :

$$gfg - g^2f = g$$
$$fg^2 - gfg = g$$

Il ne reste plus ensuite qu'à additionner : $fg^2 - g^2f = 2g$. Evidemment, on procède par **récurrence**. On suppose que : $fg^n - g^nf = ng^{n-1}$ notée (1) ; en multipliant par à droite (1) par g et à gauche l'égalité de départ par g^n ; il ne reste plus qu'à additionner ces deux équations pour obtenir la formule voulue au rang (n+1).

b) Si les deux endomrophismes étaient continus, on pourrait, une norme étant définie sur E, calculer leur norme **subordonnée** (elle *existe* sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E). D'après la propriété fondamentale de cette norme ($\|u \circ v\| \leq \|u\|.\|v\|$), on aurait après quelques calculs (effectués en majorant le menbre de droite de (1)) l'inégalité (2) :

$$n\|g^{n-1}\| \leq 2\|f\|.\|g\|.\|g^{n-1}\|$$

On a alors deux cas à distinguer :

— $\|g^{n-1}\| = 0$ alors $g^{n-1} = 0$ car c'est une norme et on peut remonter les échelons de la récurrence pour montrer que $g = 0$ ce qui est impossible d'après l'égalité de départ.

— Donc $\|g^{n-1}\| > 0$ et on peut simplifier (2)... Il vient donc que **pour tout n** :

$$n \leq 2\|f\|.\|g\|$$

Ce qui aurait du mal à être vrai pour tout n ;-)

Donc f et g ne sont pas simultanément continus.

Liste de normes
Trouver toutes les normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Soit N une norme sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = N(x.1) = |x|.N(1)$$

En notant $\alpha = N(1) \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = \alpha.|x|$.

Réciproquement, il est immédiat que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha|x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : les normes sur $\mathbb{R}$ sont les applications

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha|x|, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Une CNS pour avoir une norme particulière − version 1
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $\|.\|_F$ une norme sur F, $f \in L(E,F)$ et $N : E \to \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto \|f(x)\|_F$. Trouver une CNS sur f pour que N soit une norme sur E.

Les conditions $N(\lambda x) = |\lambda|.N(x)$ et $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ sont immédiates. Et :

$$N(x) = 0 \iff \|f(x)\|_F = 0 \iff f(x) = 0$$

Enfin : $(\forall x \in E, (f(x) = 0 \implies x = 0)) \iff \ker f = \{0\}$.

Réponse : N est une norme si et seulement si f est injective.

Une CNS pour avoir une norme particulière – version 2

Soient $E = C([0;1],\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(f_1,...,f_p) \in \mathbb{E}^p, N : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x_1,...,x_p) \in \mathbb{R}^p, N(x_1,...,x_p) = \int_0^1 |\sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t)|\mathrm{dt}$$

Déterminer une CNS sur $(f_1,...,f_p)$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Les conditions $N(\lambda x) = |\lambda|.N(x)$ et $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ sont immédiates. Et : $N(x_1,...,x_p) = 0 \iff \sum_{k=1}^p x_k f_k = 0$, puisque $|\sum_{k=1}^p x_k f_k|$ est continue et ≥ 0. Enfin :

$$(\forall (x_1,...,x_p) \in \mathbb{R}^p, (\sum_{k=1}^{p} x_k f_k = 0 \implies (x_1,...,x_p) = (0,...,0))) \iff (f_1,...,f_p) \text{ libre}$$

Réponse : N est une norme si et seulement si $(f_1,...,f_p)$ est libre dans E.

Un exemple de norme sur $\mathbb{R}^2$, tracé de la boule unité fermée

On considère l'application :

$$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer et tracer dans $\mathbb{R}^2$ usuel la boule fermée $B'_N(0;1)$.

Rappel : $B'(a;r) = \{x \in E; d(a,x) \leq r\}$.

---

a) Cette question va se faire en deux étapes : pour commencer on va montrer l'existence de N (ceci n'est en effet pas immédiat) puis que N est effectivement une norme.

— *Existence* : Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$.
  — Si $|t| \leq 1$, alors : $\frac{|x+ty|}{1+t^2} \leq \frac{|x|+|t||y|}{1+t^2} \leq \frac{|x|+|y|}{1+t^2} \leq |x| + |y|$.
  — Si $|t| \geq 1$, alors : $\frac{|x+ty|}{1+t^2} \leq \frac{|x|+|t||y|}{1+t^2} \leq \frac{|x|+t^2|y|}{1+t^2} \leq |x| + |y|$.

  Ceci montre : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x+ty|}{1+t^2} \leq |x| + |y|$, donc l'application $t \mapsto \frac{|x+ty|}{1+t^2}$ est bornée, d'où l'existence de $N(x,y)$.

— *Positive-homogénéité* : On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(\lambda(x,y)) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|\lambda x + t\lambda y|}{1+t^2} = |\lambda|.\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} = |\lambda|.N(x,y)$$

— *Non-dégénérescence* : On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x,y) = 0 \iff \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} = 0$$

$$\implies \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x+ty|}{1+t^2} = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}, x+ty = 0$$
$$\implies (x,y) = (0,0)$$

— *Inégalité triangulaire* : On a pour tout $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 \text{x} \mathbb{R}^2$:

$$N((x,y)+(x',y')) = N(x+x',y+y') = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|(x+x')+t(y+y')|}{1+t^2}$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\frac{|x+ty|}{1+t^2} + \frac{|x'+ty'|}{1+t^2}\right) \text{ inégalité triangulaire dans } \mathbb{R}$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x'+ty'|}{1+t^2} \text{ propriété de la borne sup}$$

$$= N(x,y) + N(x',y')$$

On en conclut que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \in B'_N(0;1) \iff N(x,y) \leq 1$$

$$\iff \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} \leq 1 \iff \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x+ty|}{1+t^2} \leq 1$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, -1-t^2 \leq x+ty \leq 1+t^2$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{lcl} t^2+yt+(1+x) & \geq & 0 \\ t^2-yt+(1-x) & \geq & 0 \end{array} \right.$$

En constatant que le trinôme ne change pas de signe, on en déduit que sont discriminant est inférieur ou égal à 0.

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y^2-4(1+x) & \leq & 0 \\ (-y)^2-4(1-x) & \leq & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcr} y^2 & \leq & 4(x+1) \\ y^2 & \geq & 4(-x+1) \end{array} \right.$$

Condition pour avoir une norme avec des suites et des séries

Soit $\sum a_n$ une série convergente de terme général strictement positif et soit (t_n) une suite d'éléments de [0 ;1]. Soit E l'espace des fonctions continues sur [0 ;1]. On pose, pour tout f élément de E :

$$N(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.|f(t_n)|$$

A quelle condition sur la suite (t_n) définit-on ainsi une norme sur E ?

Vérifions tout d'abord que cette définition a un sens, c'est-à-dire que la série définissant N est convergente. Comme f est continue, elle est bornée sur le compact [0 ;1] donc :

$$a_n.|f(t_n)| \leq M.a_n$$

Ce qui prouve que la série est absolument convergente. Les propriétés $N(\lambda f) = |\lambda|.N(f)$ et l'inégalité triangulaire sont vérifiées trivialement ; et N est à valeurs positives.

N s'annule si et seulement si $f(t_n) = 0$ pour tout n. Ceci est équivalent à f=0 **si et seulement si** les (t_n) sont denses dans [0 ;1] :

- Il est clair que c'est une condition suffisante par continuité de f.
- Si les (t_n) ne sont pas denses, il existe un intervalle [a ;b] de [0 ;1] ne contenant aucun (t_n). Il est clair que la fonction f continue dont le graph est décrit après est de norme 0 sans être nulle elle-même.

Description du graphe : $f = 0$ sur$[0, a]$ puis sur [a ;b] f est croissante puis décroissante et enfin $f = 0$ sur$[b, 1]$.

Equivalences de normes – ☹Complexe (notion d'intérieur nécessaire)

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$, pour chaque ϕ de E, on note :

$$N_\phi : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^1 |f\phi|$$

a) Déterminer une CNS sur ϕ pour que N_ϕ soit une norme.

b) Déterminer une CNS sur ϕ pour que N_ϕ et N_1 soit des normes équivalentes.

c) Pour $(\phi, \psi) \in E^2$, déterminer une CNS sur (ϕ, ψ) pour que N_ϕ et N_ψ soient des normes équivalentes.

1.3.2 Complétude

Suites de Cauchy et extractrices

Soient $(E, \|.\|)$ un evn, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E, σ, τ deux extractrices. Montrer :

$$u_{\sigma(n)} - u_{\tau(n)} \underset{n\infty}{\to} 0$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \epsilon$$

Comme σ et τ sont des extractrices, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geq n \text{ et } \tau(n) \geq n$$

Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $\|u_{\sigma(n)} - u_{\tau(n)}\| \leq \epsilon$. Ainsi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_{\sigma(n)} - u_{\tau(n)}\| \leq \epsilon$$

Ce qui montre :

$$u_{\sigma(n)} - u_{\tau(n)} \underset{n\infty}{\to} 0$$

Complétude 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, E le $\mathbb{R} - ev$ des applications lipschitziennes de [a ;b] dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $N : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E, N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[a;b]^2, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

   est une norme sur E.
2. (E,N) est-il complet ?

---

1. Vérifications immédiates.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite Cauchy dans (E,N).

— Soit $x \in [a; b]$ fixé. Puisque :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty \leq N(f_p - f_q)$$

la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge vers un réel, qu'on note $f(x)$, ce qui définit une application $f : [a; b] \to \mathbb{R}$.

— Montrons $f \in E$. Soit $(x,y) \in [a;b]^2$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E,N), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, N(f_n) \leq M$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq N(f_n)|x-y| \leq M|x-y|$$

ce qui montre que f est lipschitzienne, donc $f \in E$.

— Montrons enfin : $f_n \underset{n\infty}{\rightarrow} f$ dans (E,N). soit $\epsilon > 0$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ ET } q \geq n_0 \implies N(f_p - f_q) \leq \frac{\epsilon}{2})$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > n_0$; on a :

$$\forall q \in \mathbb{N}, (q \geq n_0 \implies N(f_p - f_q) \leq \frac{\epsilon}{2})$$

donc :

$$\begin{cases} \forall x \in [a;b], \forall q \in \mathbb{N}, (q \geq n_0 \implies N(f_p - f_q) \leq \frac{\epsilon}{2}) \\ \forall (x,y) \in [a;b]^2, \forall q \in \mathbb{N}, (q \geq n_0 \implies |(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(y) - f_q(y))| \leq \frac{\epsilon}{2}|x-y|) \end{cases}$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient :

$$\begin{cases} \forall x \in [a;b], |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ \forall (x,y) \in [a;b]^2, |(f_p(x) - f(x)) - (f_p(y) - f(y))| \leq \frac{\epsilon}{2}|x-y| \end{cases}$$

d'où $N(f_p - f) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ceci prouve : $N(f_p - f) \underset{p\infty}{\rightarrow} 0$, c'est-à-dire $f_p \underset{p\infty}{\rightarrow} f$ dans (E,N).

Réponse : (E,N) est complet.

Complétude 2

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et $N : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], N(P) = \sup_{z\in\mathbb{U}} |P(z)|$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. $(\mathbb{C}[X], N)$ est-il complet ?

1.3.3 Etude locale d'une application : continuité

1.3.4 Topologie (surtout compacité)

Compacité et adhérence

Soient E un evn, A et B deux parties non vides de E ; on suppose A compacte et $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Montrer :

$$d(A, B) > 0$$

L'application $f : E \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, B)$ est continue sur le compact A, donc est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $a \in A$ tel que $d(A, B) = d(a, B)$. Puisque $A \cap \overline{B} = \emptyset$, on a $a \notin \overline{B}$ d'où $d(a, B) > 0$.

Soient $x \in E$, A une partie non vide de E ; on appelle **distance de x à A** le réel notee $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Soient $x \in E$ et A une partie non vide de E ; on a :

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$$

Avec un diamètre

Soient E,F deux evn, X une partie compacte de E, $f : X \to F$ continue. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall y \in F, diam(f^{-1}(\{y\})) < \alpha$ (on convient : $diam(\emptyset) = 0$).

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toute boule ouverte B de rayon $\leq \epsilon$, on ait $diam(f^{-1}(B)) < \alpha$.

Raisonnons par l'absurde : supposons que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une boule ouverte B de rayon $\leq \epsilon$ telle que $diam(f^{-1}(B)) \geq \alpha$. Il existe alors une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans F telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, diam(f^{-1}(B(y_n, \frac{1}{n}))) \geq \alpha$$

Par définition du diamètre, pour chaque n de $\mathbb{N}^*$, il existe $(u_n, v_n) \in (f^{-1}(B(y_n, \frac{1}{n})))^2$ tel que :

$$d(u_n, v_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$$

Puisque $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à éléments dans le **compact** X^2, il existe une extractrice σ et $(u, v) \in X^2$ tels que :

$$u_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} u \text{ et } v_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} v$$

on a alors $d(u, v) \geq \alpha$.

Puisque f est continue : $f(u_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(u)$ et $f(v_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(v)$, puis, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d(f(u_{\sigma(n)}), f(v_{\sigma(n)})) \leq \frac{2}{\sigma(n)}$$

on déduit $f(u) = f(v)$.

Mais alors : $diam(f^{-1}(\{f(u)\})) \geq d(u, v) \geq \alpha$ <u>**contradiction**</u> **!**

Ensemble de Cantor

On note $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = C_0 -]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, $C_2 = C_1 - (]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[)$, ... Et $C = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} C_n$. Montrer que C est un compact de $\mathbb{R}$ et que $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

— Puisque $C \subset C_0$, C est bornée. D'autre part, chaque C_n est une réunion d'un nombre fini de segments de $\mathbb{R}$, donc chaque C_n est fermé dans $\mathbb{R}$; il en résulte que C, qui est $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} C_n$, est fermé dans $\mathbb{R}$. Ainsi C est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, donc **compacte**.

— Il est clair que, pour tout n de $\mathbb{N}$, C_n est la réunion de 2^n segments de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints et de même longueur $\frac{1}{3^n}$. Soient $x \in C, r \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3^n} < r$. Le segment $[x - r, x + r] \cap [0, 1]$, étant de longueur $> \frac{1}{3^n}$ n'est pas inclus dans C_n, et donc $[x - r, x + r] \not\subset C$. Ceci montre : $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

De l'importance de la compacité

Soient A et B deux parties de E, un e.v.n. avec $dim < \infty$. On note $d = d(A, B) = \inf_{x\in A; y\in B} \|x - y\|$.

a) A est fermé, B est compact. Montrer que d est "atteinte".

b) Qu'en est-il du résultat précédent si A **et** B sont fermés ?

---

a) Comme on parle de fermé, de compact, en dimension finie, il est évident qu'il faut introduire des suites et passer par des sous-suites convergentes !

Par définition de l'inf, il existe deux suites (a_n) de A et (b_n) de B telles que :

$$\forall n, d \leq \|a_n - b_n\| \leq d + \frac{1}{n} : (1)$$

B est compact : b admet donc une sous-suite convergente, en particulier bornée par M :

$$\|a_{\phi(n)}\| \leq \|a_{\phi(n)} - b_{\phi(n)}\| + \|b_{\phi(n)}\| \leq d + 1 + M$$

Ce qui prouve que $(a_{\phi(n)})$ est bornée. Par ailleurs, on sait qu'une suite bornée en dimension finie admet une valeur d'adhérence, donc on peut **ré-extraire** des suites extraites deux sous-suites convergentes vers $\alpha \in A$ et $\beta \in B$.

On en déduit par passage à la limite dans (1) pour ces suites extraites que $\|\alpha - \beta\| = d$ ce qui prouve que *l'inf est atteint.*

b) NON. On peut pour s'en convaincre prendre $E = \mathbb{R}$, $A = \{n, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Ce sont deux fermés, leur distance est nulle ; cependant, elle n'est jamais atteinte car ils sont disjoints.

Un exemple de partie compacte dans un espace de fonctions

On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$. Soit $f \in E$ fixée. On note, pour tout $\alpha \in [0,1]$:

$$f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha x)$$

et on note $F = \{f_\alpha; \alpha \in [0,1]\}$. Montrer que F est une partie compacte de E.

Notons $\varphi : [0,1] \to E, \alpha \mapsto \varphi(f) = f_\alpha$. On a ainsi, par définition de F : $F = \varphi([0,1])$. (*Nous allons montrer que F est compacte en présentant F comme image directe d'un compact par une application continue.*) On sait que [0,1] est un compact de $\mathbb{R}$. Montrons que φ est continue.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue sur le segment [0,1], d'après le théorème de Heine (*continu* $\Longrightarrow$ *uniformément continu sur un compact*), f est uniformément continue sur [0,1]. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2, (|u - v| \leq \eta \implies |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

Soit $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ tel que $|\alpha - \beta| \leq \eta$. On a :

$$\forall x \in [0,1], |\alpha x - \beta x| = |\alpha - \beta| x \leq \eta x \leq \eta$$

donc :

$$\forall x \in [0,1], |f(\alpha x) - f(\beta x)| \leq \epsilon$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0,1], |f_\alpha(x) - f_\beta(x)| \leq \epsilon$$

Ceci montre :

$$\|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|_\infty = \|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq \epsilon$$

On a prouvé :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\alpha, \beta) \in [0,1]^2, |\alpha - \beta| \leq \eta \implies \|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|_\infty \leq \epsilon$$

Ceci montre que φ est uniformément continue sur [0,1], donc continue sur [0,1]. Enfin, comme [0,1] est compact, que φ est continue, et que $F = \varphi([0,1])$, on conclut : F est une partie compacte de E.

1.3.5 Connexité par arcs

Les boules sont connexes par arcs

Montrer que, dans tout evn, toutes les boules ouvertes et toutes les boules fermées sont connexes par arcs.

Tout point x de $B(a,r)$ (ou $B'(a,r)$) peut être joint à a par un segment inclus dans $B(a,r)$ ($B'(a,r)$) :

$$[0,1] \to E$$

$$t \mapsto tx + (1-t)a$$

Ceci montre que $B(a,r)$ et $B'(a,r)$ sont connexes par arcs.

Parties homéomorphes

Donner un exemple de deux parties A,B de $\mathbb{R}$ telles que :

— A est homéomorphe à B.

— $\mathbb{R}$-A est connexe par arcs.

— $\mathbb{R}$-B n'est pas connexe par arcs.

Rappel : Un ensemble est homéomorphe à un autre lorqu'il existe un homéomorphisme pour passer de l'un à l'autre : c'est-à-dire une bijection continue dont la réciproque est continue.

Réponse : $A =]0, +\infty[$ et $B =]0, 1[$.

Une union de connexes par arcs

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un evn de dimension finie. On suppose que chaque A_i est connexe par arcs et qu'il existe $i_0 \in I$ tel que, pour tout i de I, $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$. Montrer que $\underset{i \in I}{\cup} A_i$ est connexe par arcs.

Exemple : $(\mathbb{R}\text{x}\mathbb{Q}) \cup (\{0\}\text{x}\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Notons $A = \underset{i \in I}{\cup} A_i$. Soit $(a, a') \in A^2$, il existe $(i, j) \in I^2$ tel que :

$$a \in A_i \text{ et } a' \in A_j$$

Puisque $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ et $A_{i_0} \cap A_j \neq \emptyset$, il existe $b \in A_{i_0} \cap A_i$ et $c \in A_{i_0} \cap A_j$.

Comme A_i, A_{i_0} et A_j sont connexes par arcs, il existe un arc γ_1 joignant a et b dans A_i, un arc γ_2 joignant b et c dans A_{i_0} et un arc γ_3 joignant c et a' dans A_j.

Considérons l'application $\gamma : [0, 1] \to A$, obtenue par la succession de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ définie par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(3t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \gamma_2(3t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \gamma_3(3t-2) & \text{si } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Il est clair que γ est continue et joint a et a' dans A. Finalement A est <u>connexe par arcs.</u>

Exemple : On peut appliquer le résultat précédent à l'exemple, puisque la partie $\{0\}\text{x}\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs et rencontre chacune des parties de $\mathbb{R}\text{x}\{r\}$ $(r \in \mathbb{Q})$ en (0,r), et que ces parties $\mathbb{R}\text{x}\{r\}$ sont connexes par arcs.

Une propriété sur une fonction

Soient E un evn de dimension finie, A une partie connexe par arcs de E, f : A $\to \{0, 1\}$ une application continue. Montrer que f est constante. (Ici, 0,1 est muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$.)

Soit $(a, b) \in A^2$. Puisque A est connexe par arcs, il existe un arc $\gamma : [0, 1] \to A$ joignant a et b dans A. L'application $f \circ \gamma$ est continue sur [0,1] et à valeurs réelles, donc $(f \circ \gamma)([0, 1])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (grâce au théorème des valeurs intermédiaires). Comme $(f \circ \gamma)([0, 1]) \subset \{0, 1\}$, il s'ensuit que $f \circ \gamma$ est constante et donc :

$$f(a) = (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1) = f(b)$$

Finalement, f est constante.

Chapitre 2

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

2.1 L'inégalité des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\|.\|$ une norme sur E, $f : [a,b] \to E$ continue sur [a,b] et de classe C^1 sur]a,b[. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in]a,b[, \|f'(t)\| \leq \lambda$$

Alors : $\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda |b-a|$.

2.2 Exercices

Une recherche d'applications – 1

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continues en 0 et telles que :

$$\begin{cases} f(0) = (-1,1) \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(2t) = ch(t).f(t) \end{cases}$$

Pour tout t de $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(t)}{sh(t)} = \frac{ch(\frac{t}{2})f(\frac{t}{2})}{sh(t)} = \frac{1}{2}\frac{f(\frac{t}{2})}{sh(\frac{t}{2})}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(t) = \frac{sh(t)}{2^n}\frac{f(\frac{t}{2^n})}{sh(\frac{t}{2^n})}$$

En déduire la valeur de $f(t)$ en faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant la continuité de f en 0 et $\frac{sh(x)}{x} \underset{x \to 0}{\to} 1$.

Examiner la réciproque.
Réponse :

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 ; \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} (-\frac{sh(t)}{t}, \frac{sh(t)}{t}) & \text{si } t \neq 0 \\ (-1, 1) & \text{si } t = 0 \end{cases} \}$$

Une recherche d'applications – 2
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles qu'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

— Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé :

$$|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}| \leq |x - y|^{\alpha - 1} \underset{x \to y}{\to} 0$$

Ceci montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 0$, donc f est constante.

— La réciproque est évidente.

Réponse :

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x) = z, z \in \mathbb{C}\}$$

Une recherche d'application – 3
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(1 - t) = 2\overline{f(t)} + 3i$$

— Il suffit d'appliquer en $(1 - t)$ et on obtient :

$$\begin{array}{ll} \forall t \in \mathbb{R}, & f(1 - (1 - t)) = f(t) = 2\overline{f(1 - t)} + 3i \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f(t) = 2\ \overline{2\overline{f(t)} + 3i}\ + 3i \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f(t) = 4f(t) - 3i \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f(t) = i \end{array}$$

— La réciproque convient trivialement.

Réponse : La fonction constante qui envoie sur i.

Une application périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & f(x) \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} & f(x) = f(x+1)f(x-1) \end{cases}$$

Montrer que f est périodique.

Il suffit pour cela de manipuler un peu l'équation donnée :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) = f(x+1)f(x-1) = f(x+2)f(x)f(x-1) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{et car } f(x) \neq 0 & f(x+2)f(x-1) = 1 \\ \text{Appliquons x+1 à cette égalité :} & f(x+3)f(x) = 1 \implies f(x+3) = \frac{1}{f(x)} \\ \text{Appliquons x+3 à cette égalité :} & f(x+6) = \frac{1}{f(x+3)} = f(x) \end{array}$$

Donc f est 6-périodique.

Un exemple d'équation fonctionnelle

Montrer qu'il n'existe pas d'applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}_+, f(x+h) \geq f(x) + \sqrt{h}$$

Raisonnons absurdément en supposant l'existence d'une telle application f. On a donc en particulier (autour de zéro avec $\frac{1}{n}$) :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} f(0+\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}) \geq f(0) + \sqrt{\frac{1}{n}} \\ f(\frac{2}{n}) \geq f(\frac{1}{n}) + \sqrt{\frac{1}{n}} \\ \dots \\ f(1) \geq f(\frac{n-1}{n}) + \sqrt{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

Do'où en additionnant et en télescopant :

$$f(1) \geq f(0) + n\sqrt{\frac{1}{n}}$$

c'est-à-dire,

$$f(1) \geq f(0) + \sqrt{n}$$

Lorsque $n \to +\infty$, on obtient une contradiction.

Un nombre fini de zéros

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a, b] \to E$ dérivable telle que :

$$\forall x \in [a, b], \|f(x)\|^2 + \|f'(x)\|^2 > 0$$

Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

Raisonnons par l'absurde : supposons que f admette une infinité de zéros. Puisque [a,b] est compact, il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de f et c tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq c \\ x_n \underset{n\infty}{\to} c \end{cases}$$

Par continuité de f, on déduit $f(c) = 0$; puis, d'après l'hypothèse : $f'(c) \neq 0$.

Comme $\frac{f(x)}{x-c} \underset{x\to c}{\to} f'(c) \neq 0$, au voisinage de c (sauf en c), f ne s'annule pas, ce qui contredit la définition de c.

Chapitre 3

Intégration sur intervalle quelconque

3.1 Questions de cours

cf le polycopié envoyé par Pascale Maggi...

3.2 Exercices

La majorité des exercices ici se résument juste à une recherche d'équivalent d'intégrale, ou bien encore à une simple étude d'intégrabilité avant de calculer la-dite intégrale. Dans la mesure du possible, les calculs ne sont volontairement pas *trop* complexes ni techniques mais peuvent toutefois faire l'objet d'une astuce calculatoire les rendant simples.

Une propriété particulière

Cet exercice concerne en fait les problèmes d'intégrabilité sur un intervalle compact...

f désigne ici une fonction continue de [0 ;1] dans [a ;b], où $a < 0 < b$. Vérifier :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{dt} = 0 \implies \int_0^1 [f(t)^2]\mathrm{dt} \leq -ab$$

Commençons par rappeler quelques fausses bonnes idées :

— La première idée qu'on peut raisonnablement tenter de mettre en place est l'inégalité de Cauchy-Schwarz (à cause du carré) ; cependant, cette tentative est vaine.

— La deuxième idée est d'utiliser l'encadrement : $\forall t \in [0;1], a \leq f(t) \leq b$ (*). Le seul problème est qu'**on ne peut pas élever cette inégalité au carré** en vue de l'intégrer puisque a est négatif et b positif.

Ce qui a fait achopper le deuxième point est en fait un indice de la marche correcte à suivre : il faut absolument **intégrer quelque chose de positif**.

Or l'inégalité (*) entraine immédiatement : $\forall t \in [0;1], (f(t) - a).(b - f(t)) \geq 0$. Il est alors parfaitement licite d'intégrer cette inégalité entre 0 et 1 :

$$(a+b)\int_0^1 f - ab - \int_0^1 f^2 \geq 0$$

Compte tenu de la nullité de la première intégrale (hypothèse initiale), on obtient l'inégalité souhaitée.

Etudier l'intégrabilité des fonctions f sur l'intervalle I

1. $f(t) = t^{x-1}.(1-t)^{y-1}$ sur $I =]0;1[$
2. $f(t) = t^{x-1}.\exp(-t)$ sur $I =]0;+\infty[$
3. $f(t) = |1-t^a|^b$ sur $I =]0;1[$ et avec $ab \neq 0$
4. $f(t) = [ln(t)]^{-ln(t)}$ sur $I =]1;+\infty[$

---

1. Il y a un problème en 0 et en 1. Puisque la fonction est de signe constant > 0 sur l'intervalle d'intégration et admet un équivalent simple :

$$f(t) \underset{0}{\sim} t^{x-1} \text{ et } f(t) \underset{1}{\sim} (1-t)^{y-1}$$

Ces fonctions de Riemann sont intégrables sur $]0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1[$ si et seulement si x et y sont strictement positifs. *Pour la culture : il s'agit ici de la fonction bêta d'Euler.*

2. Il y a un problème en 0 et en $+\infty$.

— En 0 : on peut encore trouver un équivalent en zéro : $f(t) \underset{0}{\sim} t^{x-1}$. Donc f est intégrable sur]0,1] si et seulement si $x > 0$.

— En $+\infty$: il serait plus délicat de trouver un équivalent ; on peut par exemple utiliser la méthode $x^\alpha.f(x)$. On a évidemment :

$$t^{\text{n'importe quoi}}.f(t) \underset{\infty}{\to} 0$$

en choisissant **n'importe quoi** $= 2$ par exemple, on en conclut que la fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour toute valeur du paramètre.

f est donc intégrable sur $I \iff x > 0$. *Pour la culture, il s'agit ici de la fonction gamma d'Euler.*

3. Les problèmes sont cette fois en 0 et en 1. Vu que les équivalents semblent bien indiqués pour les fonctions positives comme celle-ci, on aurait tort de s'en priver.

— En 0 :
  — Si $a > 0$: $f(t) \underset{0}{\to} 1$ donc par la méthode dans le cas de l'intervalle borné où la limite existe, on peut dire que f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$.
  — Si $a < 0$: $f(t) \underset{0}{\sim} t^{ab}$ qui est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$ si et seulement si $ab > -1$.

— En 1 : On peut rechercher directement un équivalent, ou gagner un peu de temps avec la dérivée. La fonction t^a est toujours dérivable en 1 donc on a, par définition de la dérivée :

$$\frac{1-t^a}{1-t} \underset{1}{\sim} at^{a-1}|_{t=1} = a$$

Ce qui donne donc : $f(t) \underset{1}{\sim} a^b.|1-t|^b$ qui est intégrable sur $[\frac{1}{2}, +\infty[\iff b > -1$.

4. Il y a effectivement un problème en 1 (forme indéterminée) et également en $+\infty$ évidemment. Remarquons d'abord que f est continue et **strictement positive** sur I.

— En 1 : Le plus logique est d'appliquer la méthode dans le cas de l'intervalle borné où la limite existe en se demandant si f n'aurait pas une limite en 1 (ce qui revient si l'on veut à chercher un équivalent) : or en prenant le logarithme de f et par *croissance comparée*, on consate que f tend vers 1 en 1. On en déduit que f est intégrable sur $I =]1, 2]$.

— En $+\infty$: Avec des logarithmes ains arrangés, on sait par habitude (ou pas) qu'il n'y a guère d'espoir de trouver un équivalent. En revanche, la même habitude nous enseigne que la méthode du $x^\alpha f(x)$ est souvent appropriée dans ce cas. On forme donc :

$$g(t) = ln(t^\alpha.f(t)) = ln(t).[\alpha - ln(ln(t))]$$

quantité qui tend vers $-\infty$ pour toute valeur du paramètre ce qui veut dire que :

$$f(t) = o(\frac{1}{t^\alpha}) \ , \forall \alpha$$

On choisit par exemple $\alpha = 2$ (par simple conformisme) pour conclure que f est inteegrable sur $]2, +\infty[$.

f est donc intégrable sur $]1, +\infty[$.

Dans l'exercice suivant, on cherchera à trouver (selon les cas) la limite ou un équivalent de l'intégrale sans se préoccuper de l'intégrabilité

1. $I_n = \int_0^1 ln(1+t^n)\text{dt}$ équivalent quand $n \to +\infty$?
2. $I(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\text{dt}$ limite L pour x tendant vers 0 et équivalent de $L - I(x)$? **Assez complexe**

---

1. Le t^n est gênant pour y voir clair, et la présence des bornes 0 et 1 invite à changer de variable en posant $u = t^n$:

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{ln(1+u)}{u}.u^{1/n}\text{du}$$

En utilisant la remarque faite après, on constate que pour $u > 0$: $\lim_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$. On peut donc penser que :

$$n.I_n \underset{n\to+\infty}{\to} I = \int_0^1 \frac{ln(1+u)}{u}\text{du}$$

Cet aparté fini, on revient à l'analyse élémentaire :

$$|nI_n - 1| \leq \int_0^1 (1-u^{1/n})\frac{ln(1+u)}{u}\text{du} \leq \sup_{[0,1]}(\frac{ln(1+u)}{u})\int_0^1 (1-u^{1/n})\text{du} = \frac{M}{n+1}$$

Ce qui confirme nos prévisions et montre que $I_n \sim \frac{1}{n}$.

2. Analysons un peu la situation : lorsque x tend vers 0, les bornes tendent toutes deux vers 0, cependant que la fonction est non inteegrable au voisinage de 0. Il ne faut donc pas hésiter à effectuer un changement de variable pour fixer les bornes :

$$I(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\text{dt} = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x^2u^2}{1-u^2}}\text{du} = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2u^2}{1-u^2}}\text{du}$$

Sous cette forme là, on conjecture que l'intégrale va se rapprocher de :

$$2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\text{du} = 2[Arcsin(u)]_0^1 = \pi$$

On peut donc procéder alternativement en deux étapes (limite **puis** équivalent) ou plus directement faire d'une pierre deux coups en essayant d'intégrer le développement limité de la différence...

Pour évaluer la différence du numérateur avec 1 on utilise la formule de **Taylor-Lagrange** à l'ordre 2 :

$$\forall u \in [0,1], |\sqrt{1+x^2u^2} - 1 - \frac{x^2u^2}{2}| \leq \frac{x^4}{8}$$

qui s'intègre en :

$$|\frac{I(x)}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{x^2}{2}\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{du}| \leq \frac{x^4}{8}$$

L'intégrale qui apparaît se calcule par exemple en posant $t = Arcsin(u)$:

$$\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{du} = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \mathrm{dt} = \frac{\pi}{4}$$

En définitive, on a bien obtenu le développement souhaité :

$$I(x) = \pi(1 + \frac{x^2}{8}) + o(x^4)$$

Remarque : il est possible de montrer sans peine qu'on peut continuer à intégrer ce développement. Les coefficients qui interviennent sont les intégrales de Wallis.

Rappel 1 – On sait qu'on peut intervertir limite et intégrale dans les deux cas suivants :

- lorsqu'on intègre sur un compact fixe une fonction continue lorsqu'il y a convergence uniforme.
- lorsqu'on intègre sur intervalle quelconque et qu'on a convergence dominée en introduisant parfois des suites de points appropriées

Sinon on cherchera à voir si la limite de l'intégrale n'est pas égale à l'intégrale de la limite et comparant habilement... ☹

Rappel 2 – Supposons que f soit de classe C^{n+1} sur I. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que l'on ait :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$

(*notons ici que θ dépend de h*)

3.3 Méthodes de calcul de primitive

Dans cette section, quelques cas de calcul de primitives sont présentés, l'idée est d'avoir les méthodes utiles pour effectuer ce genre d'intégration. Ces *recettes*, bien que pas particulièrement au programme officiel, peuvent s'avérer vaiment pratiques.

3.3.1 Primitives de $\sin^p x.\cos^q x$

Si on veut calculer $\int \sin^p x.\cos^q x\mathrm{dx}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, tout dépend de la parité de p et q.

— p est impaire : on peut poser $t = \cos x$.

— q est impaire : on peut poser $t = \sin x$.

— p et q sont paires : on linéarise...

3.3.2 Primitives de $P(x)\exp(ax)$ où P est un polinôme

On peut effectuer des intégrations par parties successives (autant que le degré de P), mais il faudra réserver cette méthode aux cas où ces degrés sont *petits*.

Il sera souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive sous la forme $Q(x)\exp(ax)$ avec deg Q = deg P.

3.3.3 Règles de Bioche

On considère ici des expressions rationnelles $R(\sin x, \cos x, \tan x)$, c'est-à-dire formées par des sommes, des produits et des puissances entières. *Rappel* : on sait que pour intégrer des expressions rationnelles il faut décomposer en éléments simples ; là seuls les éléments simples de seconde espèce peuvent poser problèmes... **Ici**, les règles de Bioche consistent à proposer un changement de variable quand l'expression $R(\sin x, \cos x, \tan x)\mathrm{dx}$ est invariante dans une certaine transformation. Ces changements de variables conduisent alors à une fraction rationnelle.

— *Invariant du cosinus* si invariance dans $x \mapsto -x$; on peut alors poser $t = \cos x$.

— *Invariant du sinus* si invariance dans $x \mapsto \pi - x$; on peut alors poser $t = \sin x$.

— *Invariant de la tangente* si invariance dans $x \mapsto x + \pi$; on peut alors poser $t = \tan x$.

Si par malheur, il n'y a pas d'*invariants*, on pourra toujours faire $t = \tan \frac{x}{2}$ qui ramènera toujours à une fraction rationnelle ; cependant le degré sera **doublé**.

3.3.4 Fractions trigonométriques $R(shx, chx, thx)$

— On peut s'inspirer des *règles de Bioche*.

— On peut poser $t = th\frac{x}{2}$.

— Le changement de variable $u = \exp(x)$ ramène aussi à une fraction rationnelle.

3.3.5 Un premier type d'intégrale *abélienne*

On doit intégrer une fraction rationnelle $R(x,y)$, où $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. On effectuera le changement de variable défini par y.

3.3.6 Un second type d'intégrale *abélienne*

On doit intégrer une fraction rationnelle $R(x,y)$, où $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$. On pose $y^2 = ax^2+bx+c$, et on se ramène à l'une des trois formes canoniques suivantes :

— $y^2 = \alpha^2((x+\lambda)^2+\mu^2) \implies$ changement de variable $x+\lambda = \mu.sh(t)$

— $y^2 = \alpha^2((x+\lambda)^2-\mu^2) \implies$ changement de variable $x+\lambda = \pm\mu.ch(t)$

— $y^2 = \alpha^2(\mu^2-(x+\lambda)^2) \implies$ changement de variable $x+\lambda = \mu\sin t$

3.3.7 Un petit formulaire bien utile

$f(x)$	$F(x)$	**Sur**	$f(x)$	$F(x)$	**Sur**
$x^\alpha, (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{1+x^2}$	arctan x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\|$	$\mathbb{R}^{*-}, \mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}ln\|\frac{1+x}{1-x}\|$	$x \neq \pm 1$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$a^x, a \neq 1$	$\frac{a^x}{ln(a)}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin x	]-1 ;1[
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$ln\|x+\sqrt{x^2-1}\|$	$\|x\| > 1$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\tan x$	$-ln\|\cos x\|$	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
sh x	ch x	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sin x}$	$ln\|\tan(\frac{x}{2})\|$	$x \neq k\pi$
ch x	sh x	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos x}$	$ln\|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\|$	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	$\frac{1}{ch^2(x)}$	th x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$x \neq k\pi$	$\frac{1}{sh^2(x)}$	$-\coth x$	$\mathbb{R}^{*-}, \mathbb{R}^{*+}$

3.3.8 Un peu de pratique... ☺

1. $\int \sin^3 x \cos^4 x \mathrm{dx} = \int (t^2-1)t^4 \mathrm{dt} = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \lambda = \frac{\cos^7}{7} - \frac{\cos^5}{5} + \lambda$.

2. On veut calculer $I = \int (x^3-2x+1)\exp(-x)\mathrm{dx}$. On pose $I = Q(x)\exp(-x)+\lambda$, avec $Q(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Par dérivation puis par identification : $(Q(x)\exp(-x))' = (Q'(x)-Q(x))\exp(-x)$, d'où

$$(-\alpha x^3 + (3\alpha-\beta)x^2 + (2\beta-\gamma)x + \gamma - \delta)\exp(-x) = (x^3-2x+1)\exp(-x)$$

$$\implies \alpha = -1, \beta = -3, \gamma = -4, \delta = -5$$

Ainsi, $\int (x^3-2x+1)\exp(-x)\mathrm{dx} = -(x^3+3x^2+4x+5)\exp(-x)+\lambda$. ☺

3. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x \cos x} = \int \frac{\mathrm{dt}}{t} = ln|\tan x| + \lambda$. Vraiment très rapide !

4. On veut calculer $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x(2-x))^3/2}$. On écrit $y = \sqrt{x(2-x)}$ puis $y^2 = x(2-x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$. On pose alors $x - 1 = \sin t$. Ainsi $\mathrm{dx} = \cos t \mathrm{dt}$ et $y = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. On en déduit : $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x(2-x))^3/2} = \int \frac{\mathrm{dy}}{y^3} = \int \frac{\mathrm{dt}}{\cos^2 t} = \tan t + \lambda = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + \lambda$

Chapitre 4

Intégrales à paramètres

4.1 Intégrales sur un intervalle compact

Soit u et v deux fonctions (dont on précisera plus loin la régularité) et F la fonction :

$$x \mapsto F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\mathrm{dt}$$

4.1.1 Continuité de F

Si :

1. $f : [a,b]$ x $I \to \mathbb{R}$ telle que $(t,x) \to f(t,x)$ est continue **par rapport au couple (t,x)**
2. u et v sont des fonctions continues à valeurs dans [a,b]

Alors la fonction F de la variable x est continue sur l'intervalle I.

4.1.2 Dérivabilité de F

Si :

1. $f : [a,b]$ x $I \to \mathbb{R}$ telle que $(t,x) \to f(t,x)$ est continue **par rapport au couple (t,x)**
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ existe et est **continue** sur I
3. u et v sont des fonctions continûment dérivables à valeurs dasn [a,b]

Alors la fonction F de la variable x est dérivable sur l'intervalle I et :

$$F'(x) = f[v(x),x].v'(x) - f[u(x),x].u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{dt}$$

Deux cas particuliers fréquents :

— Si f ne dépend **pas de x**, on retrouve la formule usuelle :

$$(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{dt})' = f[v(x)].v'(x) - f[u(x)].u'(x)$$

— Si u et v sont constantes, on retrouve évidemment :

$$(\int_a^b f(t,x)\mathrm{dt})' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{dt}$$

4.2 Intégrales sur un intervalle non borné

Supposons que : $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)\mathrm{dt}$.

4.2.1 Existence et continuité de F

S'il existe une partie A de $\mathbb{R}$ telle que :

1. f(x,t) est continue sur Ax$\mathbb{R}^+$
2. il existe g continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A\mathrm{x}\mathbb{R}^+, |f(x,t)| \leq g(t)$$

Alors,

1. F est définie pour tout x de A
2. F est continue sur A

4.2.2 Dérivabilité de F

S'il existe une partie A de $\mathbb{R}$ telle que :

1. pour tout x de A, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe et est continue sur Ax$\mathbb{R}^+$
3. il existe une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A\mathrm{x}\mathbb{R}^+, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq g(t)$$

Alors,

1. F est intégrable sur A
2. $\forall x \in A$,

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{dt}$$

4.2.3 Compléments de méthodologie

4.3 Calculer une intégrale dépendant d'un paramètre

L'idée est de trouver une équation différentielle simple satisfaite par F(x) :

1. On montre la dérivabilité une fois de F, deux fois, ou plus sur une certaine partie de $\mathbb{R}$ et on calcule ses dérivées.
2. On détermine un ED aussi simple que possible.
3. On la résout et on montre l'unicité de la solution en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz [cette partie est la même que pour la méthode présentyée dans le chapitre sur les séries entières...]

4.4 La fonction Γ d'Euler

Proposition 1

Pour tout x de $I =]0, +\infty[$, l'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur I. On appelle **fonction Γ d'Euler** l'application :

$$\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{dt}$$

Démonstration. Notons $F : (]0, +\infty[)^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $(x, t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, l'application$t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et ≥ 0. De plus,

— $F(x, t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur]0,1] car $x - 1 > -1$, donc F(x,.) est intégrable sur]0,1].

— $t^2F(x, t) = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to +\infty}{\to} 0$, donc F(x,.) est intégrable sur [1,+∞[.

Ainsi, F(x,.) est intégrable sur]0,+∞[, donc $\Gamma(x)$ existe. □

Proposition 2

1. $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n + 1) = n!$

Démonstration. **1.** Soit $(\epsilon, T) \in]0, 1]$x$[1, +\infty[$. On a, avec une **intégration par parties** (*rappel : on ne fait pas directement d'intégration par parties pour des intégrales sur un intervalle quelconque*) :

$$\int_\epsilon^T t^x e^{-t}\mathrm{dt} = [-te^{-t}]_\epsilon^T + \int_\epsilon^T xt^{x-1}e{-}t\mathrm{dt} = \epsilon^x e^{-\epsilon} - T^x e^{-t} + x\int_\epsilon^T t^{x-1}e^{-t}\mathrm{dt}$$

On en déduit, en passant aux limites quand ϵ tend vers 0 et T tend vers $+\infty$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{dt} = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{dt} = x\Gamma(x)$$

2. Récurrence sur n :

— $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{dt} = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$

— Si $\Gamma(n+1) = n!$ alors $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)!$

□

Proposition 3
La fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}\mathrm{dt}$$

Démonstration. Notons $F : (]0,+\infty[)^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $(x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)ln(t)}e^{-t}$. Il est clair que F, $\frac{\partial F}{\partial x}$, ... , $\frac{\partial^k F}{\partial^k x}$,... existent, sont continues par rapport à la première variable (x) et sont continues par morceaux par rapport à la seconde variable (t), et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x,t) \in (]0,+\infty[)^2, \frac{\partial^k FR}{\partial^k x}(x,t) = (ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}$$

Soit K une partie compacte include dans $]0,+\infty[$. Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$0 < a \leq 1 \leq b \text{ et } K \subset [a,b]$$

Notons pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{K,k} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \varphi_{K,k}(t) = |lnt|^k \max(t^{a-1}, t^{b-1})e^{-t}$$

Il est clair que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\varphi_{K,k}$ est continue, ≥ 0, intégrable sur $]0,+\infty[$, et :

$$\forall (x,t) \in K\text{x}]0,+\infty[, |\frac{\partial^k F}{\partial^k x}(x,t)| \leq \varphi_{K,k}(t)$$

Ainsi, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\frac{\partial^k F}{\partial^k x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $(]0,+\infty[)^2$.

On obtient donc le résultat voulu en invoquant le fait que les dérivées n-ième sont les intégrales des dérivées partielles n-ième. □

Proposition 4

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Démonstration.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\mathrm{dt} \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}\mathrm{du} = \sqrt{\pi}$$

□

Proposition 5
Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Démonstration. On sait que Γ est de classe C^2 (C^∞ en fait) sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (lnt)^2 t^{x-1} e^{-t}\mathrm{dt} > 0$$

donc Γ est convexe sur $]0, +\infty[$. □

Proposition 6
On peut établir que $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et que sa limite en 0^+ est $+\infty$.

Démonstration. On a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

Comme Γ est continue sur $]0, +\infty[$, *Gamma* est en particulier continue en 1, donc

$$\Gamma(x+1) \underset{x \to 0^+}{\to} \Gamma(1) = 0! = 1$$

Il en résulte : $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et il s'ensuit :

$$\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\to} +\infty$$

□

Proposition 7
Avec une étude des variations de Γ, on peut montrer que $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$.

Démonstration. Puisque $\Gamma'' > 0$, Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(2) = 1$, que Γ est continue sur [1,2] et dérivable sur]1,2[, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Puisque Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit les variations suivantes :

x	0		α		$+\infty$
$\Gamma'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Gamma(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

, with $\alpha \in]1, 2[$

□

4.5 Exercices

Un calcul d'intégrale à paramètre
Calculer : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}.\exp(-t)\mathrm{dt}$ pour $x > 0$.

Un autre...
On pose, pour x quelconque : $F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-|x-t|)}{1+t^2}\mathrm{dt}$

1. Montrer que F est définie
2. Déterminer la limite de F aux bornes de l'intervalle de définition
3. Montrer que F est la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec un second membre (on ne cherchera pas à la résoudre)
4. Montrer que F est l'unique solution de cette équation différentielle qui admette en $+\infty$ et en $-\infty$ les limites déterminées à la question 2

---

1. Posant $f(x,t) = \frac{e^{-|x-t|}}{1+t^2}$ on constate que pour tous x et t réels on a :

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

ce qui prouve que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et F est définie.

2. L'idée est d'appliquer le théorème de convergence dominée à une suite de fonctions adaptée. Ici, comme on demande la limite en $+\infty$ on considère une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ et on introduit :

$$f_n(x,t) = f(x_n,t)$$

Cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$ pour $t > 0$. De plus, pour $t > 0$, on a une domination évidente :

$$|f(x_n,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

ce qui prouve par application du théorème de convergence dominée que *la limite de la suite des intégrales est l'intégrale de la limite de la suite* autrement dit que $(F(x_n))$ converge vers 0 (intégrale de la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$).

Comme ce résultat est vrai pour toute suite (x_n) on en déduit que F tend vers 0 en $+\infty$. De plus, F est paire en x, donc le résultat vaut aussi en $-\infty$.

3. Tentons de nous affranchir des valeurs absolues, on a :

$$F(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{dt} + e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t^2}\mathrm{dt}$$

(en plus, cette opération fait disparaître le paramètre x de l'intégrande pour le renvoyer dans les bornes) La dérivation se fait donc simplement en notant (*cf rappels de cas particuliers fréquents*) :

$$\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{dt}\right)' = \frac{e^x}{1+x^2} \quad \left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t^2}\mathrm{dt}\right)' = -\frac{e^{-x}}{1+x^2}$$

En dérivant F deux fois, et injectant cela et en simplifiant, on trouve normalement que F vérifie l'équation différentielle :

$$y'' - y = \frac{-2}{1+x^2}$$

4. Si F et G sont solution de cette ED, (F-G) est solution de y"-y=0, autrement dit $F(x) - G(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Comme F et G ont de plus une limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$ on en déduit nécessairement que A et B sont nulles, donc F et G sont égales. On dispose donc d'une caractérisation de F.

L'intégrale de Poisson
Calculer pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$I(x) = \int_0^{\pi} ln(1 - 2x\cos t + x^2)\mathrm{dt}$$

---

1. Remarquer d'abord que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, l'application $[0, \pi] \to \mathbb{R}$ tq $t \mapsto 1 - 2x\cos t + x^2$ est à valeurs > 0, et donc $I(x)$ existe.

2. Pour tout x de]-1,1[–0, on a :

$$\begin{aligned} I(\tfrac{1}{x}) &= \textstyle\int_0^{\pi} ln(1 - \frac{2}{x}\cos t + \frac{1}{x^2})\mathrm{dt} \\ &= \textstyle\int_0^{\pi}(ln(x^2 - 2x\cos t + 1) - 2ln(|x|))\mathrm{dt} \\ &= I(x) - 2\pi ln|x| \end{aligned}$$

On peut donc se restreindre à calculer I(x) lorsque $x \in]-1, 1[$.

3. Notons F :]-1,1[x $[0,\pi]$ tel que $(x, t) \mapsto ln(1 - 2x\cos t + x^2)$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, F(x,.) est intégrable sur $[0,\pi]$, car F(x,.) est continue sur ce segment.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x}$: $(x, t) \mapsto \frac{2x-2\cos t}{1-2x\cos t+x^2}$ est définie sur]-1,1[x$[0,\pi]$ car pour tout $a \in [0, 1[$:

$$\forall (x, t) \in [-a, a]\mathrm{x}[0, \pi],$$

$$|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)| = |\frac{2x - 2\cos t}{1 - 2x\cos t + x^2} \leq \frac{4}{(1 - x\cos t)^2 + (x\sin t)^2} \leq \frac{4}{(1-a)^2}$$

et l'application constante $\frac{4}{(1-a)^2}$ est intégrable sur le segment [0,π].

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int_0^\pi$, l'application I est de classe C^1 sur]-1,1[et :

$$\begin{aligned} I'(x) &= \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{dt} = \int_0^\pi \frac{2x-2\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\mathrm{dt} \\ &\underset{u=tan(\frac{t}{2})}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2x-2\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1-2x\frac{1-u^2}{1+u^2}+x^2}\frac{2\mathrm{du}}{1+u^2} \\ &= 4\int_0^{+\infty} \frac{(x-1)+(x+1)u^2}{((x-1)^2+(x+1)^2u^2)(1+u^2)}\mathrm{du} \\ &= \frac{2}{x}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{1+u^2} + \frac{x^2-1}{(x-1)^2+(x+1)^2u^2})\mathrm{du} \text{ si } x \neq 0 \\ &= \frac{2}{x}[Arctan(u) + Arctan(\frac{x+1}{x-1}u)]_0^{+\infty} = 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ car } \frac{x+1}{x-1} < 0 \end{aligned}$$

D'autre part : $I'(0) = 0$.

Ainsi, I est constante sur]-1,1[, de plus $I(0) = 0$.

Réponse :

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ 2\pi ln|x| & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

Fonction J_0 de Bessel

Montrer que l'application $J_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{dt}$$

admet dans $[0,\pi]$ un zéro et un seul, et que celui-ci est dans $]0,\pi[$.

---

1. Notons F : $\mathbb{R}$x$[0,\pi] \to \mathbb{R}$ telle que : $(x,t) \mapsto \cos(x\sin t)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, F(x,.) est intégrable sur [0,π], car F(x,.) est continue sur ce segment.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x}$: $(x,t) \mapsto -\sin(x\sin t)\sin t$ est définie sur $\mathbb{R}$x$[0,\pi]$, continue par rapport à x, continue par morceaux (car continue) par rapport à t, et vérifie l'hypothèse de domination car :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\text{x}[0,\pi], |\frac{\partial F}{\partial x}| \leq |\sin(x\sin t)\sin t| \leq 1$$

et la constant 1 est intégrable sur le segment [0,π].

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int_0^\pi$, l'application J_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_0'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{dt} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin(x\sin t)\sin t\mathrm{dt}$$

En particulier : $\forall x \in]0,\pi[, J_0'(x) < 0$, et donc J_0 est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

2. J_0 est continue sur $[0,\pi]$ et $J_0(0) = 1$. Il reste donc à prouver $J_0(\pi) < 0$. On a :

$$\begin{aligned} J_0(\pi) &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi} \cos(\pi \sin t)\mathrm{dt} \\ &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t)\mathrm{dt} + \tfrac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\pi\sin t)\mathrm{dt} \\ &= \tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t)\mathrm{dt} \\ &\underset{y=\sin t}{=} \tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{dy} \end{aligned}$$

intégrale d'une fonction intégrable sur $[0,1[$.

On a donc $J_0(\pi) = \frac{2}{\pi}(A - B)$, d'où

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{dy} > 0 \text{ et } B = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{-\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{dy} > 0$$

Comme $B \underset{z=1-y}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi z}{\sqrt{1-(1-z)^2}}\mathrm{dz}$, on trouve :

$$A - B = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi y)\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}\right)\mathrm{dy}$$

Enfin, pour tout y de $]0, \frac{1}{2}[$: $\cos(\pi y) > 0$ et $2y - y^2 < 1 - y^2$, d'où $A - B < 0$, $J_0(\pi) < 0$.

Un calcul de l'Intégrale de Gauss

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{dt}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{dt}$$

2. En déduire que $x \mapsto f(x) + (\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{dt})^2$ est constante.
3. Conclure quant à l'Intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{dt} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

---

1. Notons F : $\mathbb{R}$x[0,1] $\to \mathbb{R}$, telle que $(x,t) \mapsto F(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, F(x,.) est intégrable sur [0,1] car F(x,.) est continue sur le segment [0,1].

— $\frac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto e^{-x^2(1+t^2)}$ existe sur $\mathbb{R}$x[0,1], est continue par rapport à x, continue par morceaux (car continue) par rapport à t.

— $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R}$x[0,1] car :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\text{x}[0,1], |\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)| = e^{-x^2(1+t^2)} \leq 1$$

et l'application constante 1 est intégrable sur le segment [0,1].

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int_0^1$, on déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} f'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{dt} \\ &= \int_0^1 -2xe^{-x2(1+t^2)}\mathrm{dt} \\ &= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{dt} \\ &\underset{u=xt}{=} -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{du} \end{aligned}$$

2. L'application $A : x \mapsto f(x) + (\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{dt})^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A'(x) = f'(x) + 2(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{dt})e^{-x^2} = 0$$

donc A est constante.

3.

— $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = A(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt} = [Arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

— $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}\mathrm{dt} = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$$

donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

— Il en résulte : $(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{dt})^2 \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$, d'où $\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{dt} \underset{x\to+\infty}{\to} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ puisque $e^{-t2} \geq 0$.

On conclut que $t \mapsto e^{-t2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{dt} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Chapitre 5

Séries Numériques

5.1 Quelques méthodes utiles

— Séries géométriques : $\sum a^n$ converge, $\iff |a| < 1$.

— Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, $\iff \alpha > 1$.

— Séries de Bertrand (*Hors Programme Classique*) : voir exercices...

— Méthode de d'Alembert pour des séries à termes positifs : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in [0, 1[$, alors $\sum u_n$ converge.

— La règle $n^\alpha u_n$: soit $\sum u_n$ une série de terme général de signe quelconque.

1. s'il existe $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} LetL \neq 0$ alors, $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. s'il existe $\alpha \leq 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} LetL \neq 0$ alors, $\sum u_n$ est divergente.
3. s'il existe $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} 0$ alors, $\sum u_n$ est absolument convergente.
4. s'il existe $\alpha \leq 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} \infty$ alors, $\sum u_n$ est divergente.

De manière pratique, elle se met en oeuvre de la manière suivante : on commence par s'assurer que u_n (ou $-u_n$) est positif (ou prendre la valeur absolue) ; puis on pose $v_n = n^\alpha u_n$ et $w_n = ln(v_n)$; on étudie ensuite la limite de (w_n) en fonction de α...

— Etudier une série de produit (de Cauchy) : quand le terme général s'écrit comme une somme de la forme $u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p.b_q$, on peut dire si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes que $\sum u_n$ l'est aussi et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n).(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n)$$

5.2 Idées de questions de cours

1. Lien suite-série : la suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
2. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
3. Pour des séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec $\sum v_n$ convergeant, si $u_n = o(v_n)$ ou si $u_n = O(v_n)$ ou encore si $u_n \sim v_n$, alors la série $\sum u_n$ converge aussi. De surcroît, dans le cas de l'équivalence, les séries sont en plus de même nature.
4. Comparaison série-intégrale : Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.
5. Si f est une fonction décroissante continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} tf(t) - f(n)\text{dt}$ converge.
6. Convergence absolue : Si une série converge absolument alors elle converge.
7. Critère des séries alternées.

5.3 Exercices

Séries de Bertrand – Classique
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta}$.

---

1) Si $\alpha > 1$, en notant $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, on a : $n^\gamma \frac{1}{n^\alpha(ln(n))^\beta} = n^{\frac{1-\alpha}{2}}(ln(n))^{-\beta} \underset{n\infty}{\rightarrow} 0$, et donc la série converge.

2) Si $\alpha < 1$, comme $n\frac{1}{n^\alpha(ln(n))^\beta} = n^{1-\alpha}(ln(n))^{-\beta} \underset{n\infty}{\rightarrow} +\infty$, il existe un indice à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha(ln(n))^\beta} \geq \frac{1}{n}$, et donc la série étudiée diverge.

3) Supposons maintenant $\alpha = 1$. Nous allons utiliser une *comparaison série-intégrale.* Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha(ln(x))^\beta}$ décroît au voisinage de $+\infty$ (il suffit pour cela d'étudier sa dérivée), il existe $N \geq 3$ tel que :

$$\forall n \geq N, \int_N^{n+1} \frac{1}{x^\alpha(ln(x))^\beta}\text{dx} \leq \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\alpha(ln(k))^\beta} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha(ln(x))^\beta}\text{dx}$$

— Si $\beta > 1$, alors, pour tout n tel que $n \geq N$:

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\alpha(ln(k))^\beta} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha(ln(x))^\beta}\text{dx} \underset{y=ln(x)}{=} \int_{ln(N-1)}^{ln(n)} \frac{\text{dy}}{y^\beta}$$

$$= \frac{(ln(N-1))^{1-\beta} - (ln(n))^{1-\beta}}{\beta - 1} \leq \frac{(ln(N-1))^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

d'après le lemme fondamental (somme partielle majorée pour une série à termes positifs), il en résulte que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta}$ converge.

— Si $\beta = 1$, alors, pour tout n tel que $n \geq N$:

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k.ln(k)} \geq \int_N^{n+1} \frac{\mathrm{dx}}{x.ln(x)} = \int_{ln(N)}^{ln(n+1)} \frac{\mathrm{dy}}{y} = ln(ln(n+1)) - ln(ln(N)) \underset{n\infty}{\to} +\infty$$

donc $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{n.ln(n)}$ diverge.

— Si $\beta < 1$, alors, comme $\frac{1}{n(ln(n))^\beta} \geq \frac{1}{n.ln(n)}$, $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{n(ln(n))^\beta}$ diverge.

Conclusion – Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si :

— $\alpha > 1$

— $(\alpha = 1 ET \beta > 1)$

Règle de Raab-Duhamel – Classique

On considère une série dont le terme général est strictement positif tel que :

$$\exists \alpha \text{ tel que } \forall n : \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

En considérant la suite $v_n = ln(u_n)$, démontrer qu'il existe $A > 0$ telle que : $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

La suite $v_n = ln(u_n)$ est bien définie puisque le terme général est > 0 et en prenant le logarithme népérien de l'égalité de départ :

$$ln(\frac{u_{k+1}}{u_k}) = v_{k+1} - v_k = ln(1 - \frac{\alpha}{k} + O(\frac{1}{k^2})) = -\frac{\alpha}{k} + O(\frac{1}{k^2}) = -\frac{\alpha}{k} + w_k$$

En sommant ces égalités pour k allant de 1 à n :

$$v_{n+1} - v_1 = -\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} w_k \ (*)$$

D'une part le deuxième terme a une limite W pour $n \to +\infty$ puisque $w_k = O(\frac{1}{k^2})$ donc $\sum w_k$ est une série absolument convergente. Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = W + o(1)$$

D'autre part, on sait que la série harmonique possède un développement asymptotique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln(n) + \gamma + o(1)$$

En injectant ces éléments dans (*) on obtient :

$$v_{n+1} = -\alpha ln(n) + v_1 - \alpha\gamma + W + o(1)$$

Ceci veut exactement dire :

$$ln(n^{\alpha}.u_n) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} v_1 - \alpha\gamma + W$$

En passant à l'exponentielle on obtient bien le résultat avec $A = \exp(v_1 - \alpha\gamma + W) \geq 0$.

Remarque : On peut remplacer le $O(\frac{1}{n^2})$ par le terme général de n'importe quelle série absolument convergente sans rien changer à la démonstration.

Développement asymptotique de la série harmonique

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Soit $u_n = H_n - ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Démontrer que ces suites sont adjaçantes et convergent vers une constante réelle strictement positive γ.

La différence $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et converge vers 0. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puisque :

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - ln(n) + ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - ln(1 - \frac{1}{n+1}) \geq 0$$

en vertu de l'inégalité $ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$. D'autre part, cette même inégalité assure la croissance de $(v_n)_{n\geq 1}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n} - ln(1 + \frac{1}{n}) \geq 0$$

Les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont donc adjaçantes, et elles convergent vers un réel γ. Comme $v_2 = 1 - ln(2) > 0$, on a $\gamma > 0$. On a donc :

$$H_n = ln(n) + \gamma + o(1) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty$$

Etudes rapides de convergences de séries

1. $u_n = (ln(n))^{-ln(n)}$

2. $u_n = (-1)^n \frac{ln(n)}{n - ln(n)}$
3. $u_n = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-n+1)}{n!}$ (x non entier)
4. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
5. $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^\alpha + n^\alpha}$

---

1. On va appliquer la règle $n^\alpha u_n$. Avec les notations (rappelées dans la méthode un peu plus haut), nous avons $w_n = -ln(ln(n)).ln(n)[1 - \frac{\alpha}{ln(ln(n))}] \underset{n\infty}{\rightarrow} -\infty$ pour toute valeur de α. On prend $\alpha = 2$ et on est dans le cas numéro 3 de la méthode. Donc absolument convergente.

2. On peut utiliser le théorème des séries alternées, ou bien effectuer un développement limité du terme général. La première méthode est immédiate une fois la dérivée calculée :

$$f'(x) = \frac{1 - ln(x)}{(x - ln(x))^2}$$

3. On étudie l'absolue convergence. On va utiliser la règle de d'Alembert, mais cela est insuffisant (limite égale à 1), donc on va utiliser l'amélioration dans le cas 1 en faisant un développement limité du quotient et en utlisant la règle de Raab-Duhamel.

$$|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = 1 - \frac{x+1}{n+1}$$

qui est de la forme voulue (ici le "grand O" est carrément...nul !) donc : $u_n \sim \frac{A}{n^{x+1}}$. Comme $x > 0$ on a absolue convergence.

4. C'est une différence donc on en cherche un équivalent par le théorème des accroissements finis en introduisant : $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ dont la dérivée est : $f_n'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$. On obtient alors :

$$u_n = f'(c_n) = \frac{1}{n.c_n} \exp(\frac{1}{n}.ln(c_n))$$

Comme c_n est équivalent à n, l'argument du logarithme tend vers 0, donc l'exponentielle tend vers 1, et le terme général est donc équivalent à $\frac{1}{n^2}$.

5. On a dit qu'il fallait rechercher un équivalent des intégrales ; on se doute que les changements de variables sont un outil fort utile. En effet, ici $t = v.n$ donne :

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dv}}{v^\alpha + 1} = \frac{\mathrm{constante}}{n^{\alpha-1}}$$

Il y a convergence si et seulement si $\alpha > 2$.

Résultat important pour les fonctions circulaires

Soit f une fonction de classe C^1 telle que f et f' soient éléments de $L_1([0,+\infty])$ (i.e. intégrables sur $\mathbb{R}^+$). Montrer que la série $\sum f(n)$ converge. (*On pourra utiliser une formule de Taylor reste intégral convenable.*) Application : étudier la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n}$.

Soit F une primitive de f. Comme f est positive et intégrable en $+\infty$, on en déduit que **F a une limite en** $+\infty$. Par ailleurs, d'après la formule de Taylor appliquée à l'ordre deux à F entre n et n+1 :

$$F(n+1) = F(n) + f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\mathrm{dt}$$

Comme on s'intéresse à la quantité $f(n)$, on réécrit cette égalité sous forme :

$$f(n) = [F(n+1) - F(n)] - \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\mathrm{dt} = a_n + b_n$$

On va montrer que les deux séries introduites sont convergentes.

Pour a, sa somme partielle de rang n, A_n, se calcule facilement grâce aux dominos qui donnent :

$$A_n = F(n+1) - F(0)$$

quantité qui a (comme F) une limite finie en $+\infty$.

Pour b, on a absolue convergence car :

$$|b_n| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|.\mathrm{dt}$$

La série majorante est convergente car f' est supposée intégrable.

On en déduit que la série $\sum f(n)$ converge. Application : il est immédiat par changements de variables et majorations assez standard que f et f' sont intégrables.

Nature d'une série – X/ENS

Quelle est la nature de la série $\sum ln(\frac{(ln(n+1))^2}{ln(n)ln(n+2)})$?

Observons pour commencer que la série est positive. En effet, on a

$$u_n = ln(\frac{(ln(n+1))^2}{ln(n)ln(n+2)}) = 2ln(ln(n+1)) - ln(ln(n)) - ln(ln(n+2)) \geq 0$$

par concavité de la fonction $t \mapsto ln(ln(t))$. On va maintenant estimer u_n par un développement asymptotique. Posons $u_n = ln(v_n)$. On peut écrire pour n tendant vers $+\infty$

$$v_n = \frac{[lnn + ln(1+\frac{1}{n})]^2}{lnn[lnn + ln(1+\frac{2}{n})]} = \frac{[lnn + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})]^2}{lnn[lnn + \frac{2}{n} + O(\frac{1}{n^2})]}$$

$$v_n = \frac{[1 + \frac{1}{nlnn} + O(\frac{1}{n^2 lnn})]^2}{1 + \frac{2}{nlnn} + O(\frac{1}{n^2 lnn})}$$

$$v_n = (1 + \frac{2}{nlnn} + O(\frac{1}{n^2 lnn}))\text{x}(1 - \frac{2}{nlnn} + O(\frac{1}{n^2 lnn}))$$

$$v_n = 1 + O(\frac{1}{n^2 lnn})$$

et par conséquent,

$$u_n = lnv_n = ln(1 + O(\frac{1}{n^2 lnn})) = O(\frac{1}{n^2 lnn})$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2 lnn}$ converge (série de Bertrand), le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure la convergence de la série étudiée.

En fait, on peut même calculer sa somme. Il suffit de constater que dans la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} (2ln(ln(n+1)) - ln(ln(n)) - ln(ln(n+2)))$$

la plupart des termes s'éliminent. On obtient

$$S_n = ln(ln(n+1)) - ln(ln(n+2)) + ln(ln(3)) - ln(ln(2))$$

qui tend vers $ln(ln(3)) - ln(ln(2))$ quand n tend vers $+\infty$.

Etude d'une convergence – X/ENS

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum a_n$ converge.

1. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ converge.
2. Que dire dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$?

---

1. On peut envisager de majorer la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour faire apparaître la somme des a_n sur laquelle nous avons une hypothèse ; en effet, pour tout $N \geq 1$, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha} \leq (\sum_{n=1}^{N} (\sqrt{a_n})^2)^{1/2}.(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha}})^{1/2} \leq (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n)^{1/2}.(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}})^{1/2}$$

puisque la série de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge (car $2\alpha > 1$). Les sommes partielles de la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ étant majorées, cette série à termes positifs converge.

On pouvait également majorer directement le terme général en écrivant : $\frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n^{2\alpha}} + a_n)$ (c'est tout simplement l'inégalité arithmético-géométrique). Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure.

2. On ne peut répondre de manière générale : si les a_n sont tous nuls la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^{1/2}}$ converge. En revanche, si $a_n = \frac{1}{n.ln^2(n)}$ (pour $n \geq 2$), $\frac{\sqrt{a_n}}{n^{1/2}} = \frac{1}{nln(n)}$ est le terme général d'une série divergente.

Une transformation d'Abel – X/ENS

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive décroissante qui converge vers 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$$

Notons que les séries en question sont à termes positifs. Posons pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$. On a, pour $n \geq 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)u_k$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (k - (k-1))u_k + (1-1)u_1 - nu_{n+1} = S_n - nu_{n+1}$$

— Supposons que $\sum u_n$ converge et notons S sa somme. Dans ces conditions, on a $T_n \leq S_n \leq S$ pour tout entier n. Donc, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont majorés par S. Cette série converge et sa somme T est, par passage à la limite dans l'inégalité $T_n \leq S$, inférieure ou égale à S.

— Réciproquement, supposons que $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge et notons T sa somme. Posons $v_k = k(u_k - u_{k+1})$. On va montrer que la suite nu_{n+1} tend vers 0, ce qui impliquera à la fois la convergence de la série $\sum u_n$ et le fait que les deux séries ont la même somme d'après l'identité $T_n = S_n - nu_{n+1}$. On a pour tout entier $k \geq 1$, $u_k - u_{k+1} = \frac{v_k}{k}$, ce qui donne, puisque u_n tend vers 0,

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}$$

On en déduit que $0 \leq nu_{n+1} \leq nu_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$, quantité qui tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente. La limite de nu_{n+1} est donc nulle.

Conclusion : Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et en cas de convergence ont la même somme.

Chapitre 6

Extension : Familles sommables de nombres complexes

6.1 Rappels

6.2 Applications

6.3 Exercices

Calcul d'une somme par utilisation d'une série double

Existence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{2^n}$, où ζ désigne la fonction dzeta de Riemann : $\zeta :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$.

On va introduire une série double, de façon que l'expression proposée dans l'énoncé corresponde à : $\sum_{n\geq 2} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$. Notons, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq 2$ et $p \geq 1$: $u_{n,p} = \frac{1}{(2p)^n} \geq 0$.

— Soit $p \geq 1$ fixé. La série géométrique $\sum_{n\geq 2} (\frac{1}{2p})^n$ converge, car $|\frac{1}{2p}| < 1$, et on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{2p})^n = (\frac{1}{2p})^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2p})^n = \frac{1}{(2p)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2p}} = \frac{1}{2p(2p-1)}$$

— Puisque $\frac{1}{2p(2p-1)} \underset{p\infty}{\sim} \frac{1}{4p^2} \geq 0$, d'après l'exemple de Riemann $(2 > 1)$ et le théorème d'équivalence pour des séries à termes réels ≥ 0, la série $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{2p(2p-1)}$ converge.

On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2p(2p-1)} = \sum_{p=1}^{N} (\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p}) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2p-1} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2p}$$

$$= (\sum_{q=1}^{2N} \frac{1}{q} - \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{2r}) - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2p} = \sum_{q=1}^{2N} \frac{1}{2q} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

On peut ici utiliser le développement asymptotique de la série harmonique pour obtenir :

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2p(2p-1)} = ln(2) + o(1)$$

donc, $\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2p(2p-1)} \underset{N\to\infty}{\to} ln(2)$. Ainsi, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{n\geq 2} u_{n,p}$ converge, et la série $\sum_{p\geq 1}(\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p})$ converge et a pour somme $ln(2)$. D'après le théorème d'interversion des sommations, dans le cas de $\mathbb{R}^+$, on déduit que pour tout $n \geq 2$, la série $\sum_{p\geq 1} u_{n,p}$ converge, que la série $\sum_{n\geq 2}(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p})$ converge et que : $\sum_{n=2}^{+\infty}(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}) = \sum_{p=1}^{+\infty}(\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p}) = ln(2)$. Enfin, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2^n}\zeta(n)$$

On conclut :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{2^n} = ln(2)$$

Produits de séries semi-convergentes

Rappel 1 : On dit qu'une série est semi-convergente lorsqu'elle converge mais ne converge pas absolument.

Rappel 2 : Le **produit de Cauchy** des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ de nombres complexes est la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

1. Montrer que le produit (de Cauchy évidemment) de la série semi-convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même est une série divergente.

2. Montrer que le produit de la série semi-convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ par elle-même est une série convergente.

---

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n+1-k}}{\sqrt{n+1-k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}$. On peut remarquer que $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $k(n+1-k) \leq \frac{(n+1)^2}{4}$, d'où : $|w_n| \geq \frac{2n}{n+1}$, et donc w_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers ∞. Il y a divergence grossière.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \frac{(-1)^{n+1-k}}{n+1-k} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+1-k)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Il suffit de montrer que la suite $(\frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})_{n \geq 1}$ décroît, en utilisant par exemple le développement asymptotique de la série harmonique, afin d'appliquer le théorème spécial de convergence des séries alternées.

Chapitre 7

Suites et Séries de fonctions

7.1 Convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers f. On dit que (f_n) **converge uniformément** sur I vers f et on note $f_n \underset{I}{\overset{C.U.}{\rightarrow}} f$ lorsque :

1. $m_n = \sup\limits_I(|f_n(x) - f(x)|)$ existe ;
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} m_n = 0$.

On peut écrire cette définition autrement :

$$f_n \underset{I}{\overset{C.U.}{\rightarrow}} f \iff \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, (n \geq N_\epsilon \implies \sup_I(|f_n(x) - f(x)|) < \epsilon)$$

ou encore :

$$f_n \underset{I}{\overset{C.U.}{\rightarrow}} f \iff \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, (n \geq N_\epsilon \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

Note : N_ϵ **ne dépend pas** de x.

7.2 Convergence normale

On dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ **converge normalement** (sur X) si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies f_n \in B(X, E)) \\ \sum_{n \geq N} \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

Rappel de notation : B(X,E) désigne l'ensemble des applications bornées de X dans E.

De plus, on a :

— *C.N.* $\implies$ *C.A.* $\implies$ *C.S.*

— *C.N.* $\implies$ *C.U.* $\implies$ *C.S.*

7.3 Démonstrations ☺

— La convergence uniforme implique la convergence simple
— (*Réciproque fausse*)
— Théorème de continuité des séries de fonctions
— Théorème d'interversion des limites
— Théorème d'intégration terme à terme sur un segment
— Théorème de dérivation terme à terme

7.4 Exercices : Suites de fonctions

Etudier (convergence simple et uniforme) les suites d'applications :

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$
2. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n-1}{x^n+1}$
3. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = ln(1+\frac{x}{n})$

1.
— Pour $x \neq 0$ fixé, $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \underset{n\infty}{\to} 0$.
— $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$
— $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(|x| \geq a \implies |f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{na})$$

Réponse : $f_n \underset{n\infty}{\overset{C.S.}{\to}} 0$ sur $\mathbb{R}$; $f_n \underset{n\infty}{\overset{C.U.}{\to}} 0$ sur tout $]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$ pour $a > 0$ fixé ; $f_n \underset{n\infty}{\overset{C.U.}{\not\to}} 0$ sur $\mathbb{R}$.

2.

3. $f_n \underset{n\infty}{\overset{C.S.}{\to}} 0$ sur $\mathbb{R}^+$; $f_n \underset{n\infty}{\overset{C.U.}{\not\to}} 0$ sur $\mathbb{R}^+$; $f_n \underset{n\infty}{\overset{C.U.}{\to}} 0$ sur tout [0 ;a], $a \in \mathbb{R}^+$ fixé.

Composition par la droite

Soient X,Y deux ensembles non vides, $\phi : X \to Y$ une application, $(f_n : Y \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : Y \to E$ une application. On suppose : $f_n \underset{n\infty}{\overset{C.U.}{\to}} f$. Montrer que $f_n \circ \phi \underset{n\infty}{\overset{C.U.}{\to}} f \circ \phi$.

Puisque $f_n \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\rightarrow}} f$, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall y \in Y, \|f_n(y) - f(y)\|_E \leq \epsilon$$

et donc en particulier,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(\phi(x)) - f(\phi(x))\|_E \leq \epsilon$$

c'est à dire : $f_n \circ \phi \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\rightarrow}} f \circ \phi$.

Composition par la gauche

1. Soient $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : X \to E$ une application, F un $\mathbb{K}$-ev, $g : E \to F$ une application. On suppose $f_n \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\rightarrow}} f$ et g uniformément continue sur E. Montrer que $g \circ f_n \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\rightarrow}} g \circ f$.
2. Le résultat précédent reste-t'il vrai si on remplace l'hypothèse d'uniforme continuité par celle de continuité ?

---

1. Soit $\epsilon > 0$. Puisque g est uniformément continue sur E, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (y, y') \in E^2, (\|y - y'\|_E \leq \eta \implies \|g(y) - g(y')\|_F \leq \epsilon)$$

Puis, comme $f_n \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\rightarrow}} f$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \eta$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)\|_F \leq \epsilon$$

ce qui montre : $g \circ f_n \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\rightarrow}} g \circ f$

2. Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui $x \mapsto x^2$. Il est clair que $f_n \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\rightarrow}} f$, où $f : x \mapsto x$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| = |(x + \frac{1}{n})^2 - x^2| = |\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}|$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |(g \circ f_n - g \circ f)(n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \underset{n\infty}{\not\rightarrow} 0$$

Ce qui montre qu'il n'a pas convergence uniforme.

Avec des extractrices...

Soient $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues sur X, convergeant unifomément sur X vers une application $f : X \to E$, $(u_n)_n$ une suite dans X convergeant vers une élément l de X, et $\sigma, \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux extractrices. Montrer : $f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) \underset{n\infty}{\to} f(l)$.

Puisque $f_n \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\to}} f$ et que les f_n sont continues, f est est **continue**. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, (\|x - l\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(l)\| \leq \frac{\epsilon}{2})$$

Puis, comme $u_n \underset{n\infty}{\to} l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \implies \|u_n - l\| \leq \eta)$$

Enfin, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2})$$

Notons $N = \max(N_1, N_2)$, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. On a alors $\sigma(n) \geq n \geq N_1$ et $\tau(n) \geq n \geq N_2$, d'où :

$$\|f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) - f(l)\| \leq \|f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) - f(u_{\tau(n)})\| + \|f(u_{\tau(n)}) - f(l)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

Finalement, $f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) \underset{n\infty}{\to} f(l)$.

Une suite de fonctions + Une primitive

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et F une primitive quelconque de f. On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{2}[F(x + \frac{1}{n}) - F(x - \frac{1}{n})]$$

Démontrer que cette suite converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

On trouve facilement les égalités suivantes par changement de variable :

$$f_n(x) = \frac{nx}{2}.\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(t)\mathrm{dt} = \frac{nx}{2}\int_{-1/n}^{1/n} f(x+u)\mathrm{du} = \frac{nx}{2}\int_0^{1/n}(f(x+u)+f(x-u))\mathrm{du}$$

Si f est constante égale à M, la suite est identiquement égale à xM. On peut penser qu'il y a convergence vers $xf(x)$. Pour majorer la différence, on va utiliser le fameux principe d'*homogénéisation des différences*, c'est-à-dire écrire f comme une intégrale :

$$f_n(x) - xf(x) = \frac{nx}{2}\int_0^{1/n}(f(x+u)+f(x-u))\mathrm{du} - \frac{nx}{2}\int_0^{1/n}(f(x)+f(x))\mathrm{du}$$

Puis :

$$f_n(x) - xf(x) = \frac{nx}{2}\int_0^{1/n}[f(x+u) - f(x)] + [f(x-u) - f(x)]\mathrm{du}$$

La continuité de f ne suffira pas à elle seule : il va falloir invoquer une continuité **uniforme**. On cherche à montrer une convergence uniforme pour x dans un compact. Il existe donc une constante A telle que :

$$|x| < A$$

Il est facile de voir que les arguments de f (à savoir x+u, x, et x-u) restent, lorsque u décrit $[0, \frac{1}{n}]$ et x décrit [-A,A], dans le **compact fixe** [-A-1,A+1]. Sur [-A-1,A+1], f est continue donc uniformément continue (*Théorème de Heine*) ; on a donc une estimation conditionnelle du type :

$$\forall \epsilon, \exists \alpha \text{ tel que : } \forall (s,t) \in [-A-1, A+1], |s-t| < \alpha \implies |f(s) - f(t)| < \epsilon$$

Choisissons alors $\epsilon > 0$, et $N > \frac{1}{\alpha}$. Compte tenu des arguments précédents :

$$\forall x \in [-A, A], \forall n \geq N, |f_n(x) - xf(x)| \leq \frac{n|x|}{2}.\int_0^{1/n} 2\epsilon.\mathrm{du} \leq A.\epsilon$$

On vient d'établir la convergence uniforme de la suite sur tout compact.

7.5 Exercices : Séries de fonctions

Une série basique
Etude de $\sum_{n\geq 0} f_n, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin nx}{n!}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est bornée et $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n!}$. Comme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge, on en déduit que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément, absolument, simplement.

Etude des convergence – 1

1. Etudier les convergences de $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$.
2. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$; montrer que $S(x) \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$.

---

1. Convergence simple :

— si $x > 1$, alors $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{n}{x}$

— si $x = 1$, alors $f_n(x) = \frac{n}{2}$

— si $0 < x < 1$, alors $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} nx^{n-1}$

Réponse :

— L'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$ est [0,1[.

— $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur [0,1[.

— $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout [0,a], $a \in [0, 1[$ fixé.

2.

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,1[, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq f_N(x) = \frac{Nx^{N-1}}{1+x^N}$$

Soit $A \in \mathbb{R}^+$ fixé ; il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{N}{2} > A$. Comme $\frac{Nx^{N-1}}{1+x^N} \underset{x\to 1^-}{\to} \frac{N}{2}$, il existe $\eta \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in]1-\eta, 1[, \frac{Nx^{N-1}}{1+x^N} > A$$

et alors $S(x) > A$. Ceci montre : $S(x) \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$.

Etude des convergences – 2

1. Etudier les convergences de $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel quue $x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x)}$.
2. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$; S est-elle dérivable en 0 à droite ?

1.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n^3 x} = \frac{1}{n^3}$$

Réponse : $\sum_n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Puisque $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\to} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq A+1$. Comme $\frac{1}{x}\sum_{k=1}^N f_k(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in]0,\eta[, \frac{1}{x}\sum_{k=1}^N f_k(x) \geq A$. Enfin :

$$\forall x \in]0,\eta[, \frac{S(x)}{x} \geq \frac{1}{x}\sum_{k=1}^N f_k(x) \geq A$$

Réponse : $\frac{S(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, S n'est pas dérivable en 0 à droite.

Autour de la fonction Dzeta de Riemann

On note $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x \in]1,+\infty[$ et $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer :
$$\forall x \in]1,+\infty[, T(x) = (2^{1-x}-1)\zeta(x)$$

$$\forall x \in]1,+\infty[, \zeta(x)+T(x) = 2\sum_{n=1;\text{n pair}}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^x} = \frac{1}{2^{x-1}}\zeta(x)$$

Séries de Dirichlet

Soit (λ_n) une suite de réels croissante, positive et tendant vers $+\infty$ et $\sum a_n$ une série à terme général complexe, supposée convergente. On pose :

$$\begin{cases} D_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \\ \text{pour tout complexe z : } u_n(z) = a_n.\exp(-\lambda_n.z) \\ \text{pour tout réel } \theta \in [0;\frac{\pi}{2}] : \Omega(\theta) = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tels que } |Arg(z)| \leq \theta\} \end{cases}$$

1. Soit $z = x+iy$ un complexe avec $x = Re(z) > 0$. Soit a et b deux réels avec $a < b$. En exprimant : $(\exp(-za) - \exp(-zb))$ à l'aide d'une intégrale, montrer que :

$$|\exp(-za) - \exp(-zb)| \leq \frac{|z|}{x}(\exp(-xa) - \exp(-xb))$$

2. Démontrer que la série de fonctions de Dirichlet $\sum u_n(z)$ converge uniformément par rapport à z dans tout cône $\Omega(\theta)$.

---

1. La forme intégrale souhaitée est :

$$\exp(-za)-\exp(-zb) = z.\int_a^b \exp(-zt)\mathrm{dt} \implies |\exp(-za)-\exp(-zb)| \leq |z|.\int_a^b |\exp(-zt)|\mathrm{dt}$$

or avec $z = x+iy$, on a : $|\exp(-zt)| = |\exp(-t(x+iy))| = |\exp(-xt)|.|\exp(-iyt)| = |\exp(-xt)|.1 = \exp(-xt)$ d'où en reportant :

$$|\exp(-za) - \exp(-zb)| \leq |z|.\int_a^b \exp(-xt)\mathrm{dt} = \frac{|z|}{x}(\exp(-xa) - \exp(-xb))$$

2. La majoration qu'on a fait au *1.* doit encourager à faire une transformation d'Abel :

$$\sum_p^q u_n(z) = \sum_p^q (D_n - D_{n+1}).\exp(-\lambda z)$$

$$= D_p.\exp(-\lambda_p z)-D_{q+1}.\exp(-\lambda_{q+1}z)+\sum_{n=p+1}^q D_n.(\exp(-\lambda_n z)-\exp(-\lambda_{n+1}z))$$

En injectant l'inégalité du *1.*, on trouve :

$$|\sum_p^q u_n(z)| \leq |D_p|.\exp(-\lambda_p x)-|D_{q+1}|.\exp(-\lambda_{q+1}x)+\frac{|z|}{x}\sum_{n=p+1}^q D_n.(\exp(-\lambda_n x)-\exp(-\lambda_{n+1}x))$$

Puisque la série est convergente, D_n tend vers 0 donc pour $n \geq N$: $|D_n| \leq \epsilon$. Par ailleur, x étant dans $\Omega(\theta)$, on a (faire un dessin) : $\frac{|z|}{x} \leq \cos(\theta)$. En reprenant la dernière majoration et en injectant ces deux-là, on a pour $q \geq p \geq N$:

$$|\sum_p^q u_n(z)| \leq \epsilon + \epsilon + \frac{\epsilon}{\cos(\theta)}.(\exp(-\lambda_p x) - \exp(-\lambda_p x)) \leq \epsilon.(2 + \frac{1}{\cos(\theta)})$$

Le majorant tend vers 0 donc le critère de Cauchy uniforme est satisfait, ce qui assure de la convergence uniforme dans tout cône $\Omega(\theta)$.

Rappel – La méthode de la transformation d'Abel

— Cas d'application : Dans le cas où le TG u_n de la série se met sous la forme : $u_n = \alpha_n.v_n$, et si $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$ a des propriétés intéressantes connues (signe, caractère borné,...).

— Principe : Essayer de montrer que $\sum u_n$ converge par le critère de Cauchy (donc en évaluant $S_q - S_p$) après transformation de cette expression visant à introduite T.

— Mise en œuvre :

1. Ecrire $v_n = T_n - T_{n-1}$
2. Exprimer la différence des sommes partielles (de u) $S_q - S_p$ à l'aide de T en effectuant un changement d'indice :

$$S_q - S_p = \sum_{k=p}^{q} u_k = \sum_{k=p}^{q} \alpha_k.(T_k - T_{k-1}) = \sum_{k=p}^{q} \alpha_k.T_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} \alpha_{k+1}.T_k$$

3. Manipuler cette somme : on regroupe alors les indices communs à savoir $k \in [p, q-1]$ et on isole les extrêmes p-1 et q :

$$S_q - S_p = \sum_{k=p}^{q-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}).T_k + \alpha_q.T_q - \alpha_p.T_{p-1}$$

4. Injecter alors les renseignements sur T et α pour majorer cette différence.

— Mise en garde : Ce résultat est *plus ou moins* au programme : il faut donc **tout redémontrer** à chaque fois.

Une étude de la limite d'une série de fonctions
On pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$. Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes de ce domaine.

C.V.S : on a évidemment $\forall x \forall n > 0, |\frac{2x}{x^2+n^2}| \leq \frac{2|x|}{n^2}$. Ce qui nous assure que f est définie sur $\mathbb{R}$ (et qui montre la convergence uniforme sur tout compact, donc en particulier la continuité).

Comme f est visiblement paire (repasser aux sommes partielles), on se place en $+\infty$. La forme même du dénominateur fait penser à l'arctangente, et donc invite à comparer une série et une intégrale, sous réserve d'avoir une monotonie.

Allons-y : soit g la fonction : $t \to \frac{2x}{x^2+t^2}$ (x fixé). Elle est clairement décroissante. D'où :

$$\forall t \in [n, n+1], g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$$

qu'on intègre sur l'intervalle. Après réarrangement pour obtenir au centre le terme général de la série, on trouve :

$$\int_{n}^{n+1} \frac{2t}{x^2+t^2}\mathrm{dt} \leq \frac{2t}{t^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{2t}{x^2+t^2}\mathrm{dt}$$

On somme de 0 à N pour obtenir, après calcul des intégrales :

$$2Arctan(\frac{N+1}{t}) \leq \sum_{0}^{N} \frac{2t}{t^2+n^2} \leq 2Arctan(\frac{N}{t}) + \frac{2}{t}$$

En passant à la limite pour $N \to +\infty$:

$$\pi \leq f(t) \leq \pi + \frac{2}{t}$$

En faisant enfin tendre t vers $+\infty$, on trouve que la limite de f aux bornes est π.

Encore une illustration du rapport étroit suite/série/intégrale lorsqu'on a une fonction décroissante.

Chapitre 8

Séries Entières

8.1 Un peu de méthodologie

8.1.1 Déterminer le rayon de convergence

1. Revenir à la définition :

— Définition : Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est :

$$\sup\{r > 0 \text{ tels que } \sum a_n r^n \text{ soit une série } \textbf{absolument} \text{ convergente}\}$$

— Propriété fondamentale : la série $\sum a_n z^n$ est :
  — Absolument convergente pour $|z| < R$
  — Trivialement divergente pour $|z| > R$ (son terme général n'est pas borné)
  — Sur le cercle $|z| = R$, on ne peut en général rien dire sur la série

— Mise en œuvre pratique de la définition :
  1. On majore le terme général $a_n z^n$ de façon suffisamment preecise par le terme général d'une autre série entière dont on sait qu'elle converge pour $|z| < A$; alors, on en déduit que : $R \geq A$.
  2. On essaye ensuite de montrer que $R \leq A$:
     — Soit par l'absurde en montrant que pour $|z| > A$ il y a divergence.
     — Soit en cherchant des points sur le cercle $|z| = A$ tels que la série diverge.

2. Utiliser la règle de d'Alembert : Elle dit en substance que

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lambda \implies R = \frac{1}{\lambda}$$

en prenant comme conventions :

$$\frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{\infty} = 0$$

3. Faire des opérations sur les séries entières :

1. Somme

$$\text{Rayon } \left(\sum (a_n + b_n) z^n\right) \geq \min\{\text{rayon } (\sum a_n z^n), \text{rayon } (\sum b_n z^n)\}$$

*Cas particulier : lorsque les deux séries qu'on somme ont des rayons **différents**, alors l'inégalité devient une égalité*

2. Produit au sens de Cauchy

$$\text{Rayon } \left(\sum (\sum_{p+q=n} a_p b_q) z^n\right) \geq \min\{\text{rayon } (\sum a_n z^n), \text{rayon } (\sum b_n z^n)\}$$

3. Dérivation et intégration terme à terme : conservation du rayon de convergence.

8.1.2 Déterminer un développement en série entière

1. Se ramener aux fonctions usuelles : On commence par considérer la fonction comme somme, produit, dérivée ou primitive d'une ou plusieurs fonctions de référence ; on en déduit que le DSE de la fonction est respectivement la somme, le produite, la dérivation ou la primitive terme à terme du DSE de ces fonctions de référence.

2. Utiliser la méthode de l'équation différentielle : on va chercher à appliquer cela lorsque la fonction dont on cherche le DSE satisfait une ED *assez simple*. La mise en œuvre est la suivante :

1. **Supposer** que f est DSE et que son rayon R est **non nul** (donc $R > 0$).
2. Déterminer une équation différentielle *assez simple* vérifiée par f.
3. Reporter l'expression de f et de ses dérivées sous forme de série entière dans l'ED.
4. Arranger l'ED pour arriver à des relations de **récurrence** sur les a_n : en invoquant l**unicité** du DSE, identifier deux à deux les termes de même degré.
5. **Vérifier** que la série $\sum a_n z^n$ ainsi trouvée a un rayon non nul (en général par la règle de d'Alembert).
6. S'assurer enfin de l'**unicité** de la solution de l'ED utilisée, à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz pour conclure que f est égale à la somme de la série trouvée.

3. Utiliser la série de Taylor de f. Pour commencer, rappelons que la série de Taylor de f est $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$. De plus, **si la série de Taylor de f converge <u>vers f</u> alors f est DSE au voisinage de 0**. Mise en œuvre : On majore par récurrence les dérivées successives de f ; on montre ensuite que la série de Taylor de f converge bien vers f en majorant un reste de Taylor (Lagrange ou intégral).

8.1.3 Etablir des propriétés sur la somme de la série entière

Si la variable est **complexe** :

— $f(z)$ est continue sur le disque **ouvert** de convergence.

Si la variable est **réelle** :

— $f(x)$ est continue sur le disque **ouvert** de convergence.

— $f(x)$ est indéfiniment dérivable sur]-R,R[et :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)(n-2)...(n-p+1)a_n x^n$$

— On peut intégrer terme à terme sur le disque ouvert de convergence.

8.2 Astuces ☺

— Il est souvent utile d'utiliser l'unicité du DSE (*ex : établissement des relations de récurrence sur les coefficients dans la méthode dite de l'équation différencielle.*

— Il est parfois plus simple d'étudier des sommes finies et d'étudier un reste plutôt que de vouloir intégrer terme à terme une série entière.

— Lorsque l'on prouve qu'en un point particulier du cercle d'incertitude la série entière est **absolument** convergente, c'est qu'elle converge sur tout le cercle. (Car même module)

— Utiliser la parité de f pour conclure à la nullité de certains coefficients du DSE.

— $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

— Si le but d'un exercice est de prouver que **toutes** les solutions d'une éauq diff sont DSE, il ne faut pas chercher une solution **particulière** DSE, mais montrer que f est somme de sa série de Taylor.

8.3 Exercices

3 Rayons de convergence

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ dans les cas :

1. $a_n = ln(1 + \frac{1}{n})$
2. a_n est la n-ième décimale de π
3. $a_n = \sin(n\theta)$ avec $\theta \neq k\pi$

---

1. a_n est équivalent à $\frac{1}{n}$; la règle de d'Alembert donne instantanément $R = 1$.

2. On ne peut pas utiliser d'Alembert, ni faire des opérations sur les séries entières, revenons à la définition.

— $|a_n x^n| \leq 9.|x|^n$ qui est de rayon 1, donc $R \geq 1$.

— La série diverge en 1. En effet, comme π est irrationnel, aussi loin qu'on aille, il y aura des a_n non nuls. Donc le terme général de la série $\sum a_n$ ne tend pas vers zéro, donc cette série diverge. Donc $R \leq 1$.

— Finalement, $R = 1$.

3. C'est le même principe que pour la question précédente :

— $|a_n x^n| \leq |x|^n$ qui est de rayon 1, donc $R \geq 1$

— On sait que $(\sin(n\theta))$ n'a pas de limite. En particulier le terme général de $\sum a_n$ ne tend pas vers 0 et cette série diverge. Donc $R \leq 1$

— Finalement, $R = 1$.

Montrons que $((\sin(n\theta))$ n'a pas de limite...

---

3 Développements en série entière

Déterminer les DSE des fonctions suivantes :

1. $ln(1 + x + x^2)$
2. $(Arcsin(x))^2$
3. $(\sin x)^2$

---

1. Il serait maladroit de calculer les dérivées n-ièmes de f en vue de faire des opérations sur les séries entières. Il semble assez naturel de tenter une méthode d'équa diff, puisque l'équation différentielle simple vérifiée par f est :

$$y' = \frac{2x + 1}{1 + x + x^2}$$

On décompose en éléments simples et on développe chaque terme en série entière, et ca marche... après 10 pages de calculs ! ! !

Il est beaucoup plus simple de remarquer que :

$$1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x}$$

Quand on prend le logarithme, il vient :

$$ln(1 + x + x^2) = ln(1 - x^3) - ln(1 - x)$$

On peut revenir à la définition du rayon de convergence pour dire que $R = 1$ et le DSE :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$$

2. Là, pour le coup, on ne voit pas de fonction de référence apparaître donc, on essaye de trouver une équa diff' :

— On suppose que f est DSE sur]-R,R[où $R < 1$ (puisque Arcsin est défini sur [-1,1]).

— On trouve en éliminant f entre y' et y" que :

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2$$

— On reporte l'expression $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dans cette équation en dérivant terme à terme ce qui est licite ; on arrive **par unicité du DSE** à :

$$a_0 = 2 \text{ et } (n + 2)(n + 1)a_{n+2} = n^2.a_n$$

qui donnent facilement :

$$a_{2n} = \frac{2^{2n-2}.(n-1)!^2}{n.(2n-1)!} \text{ et } a_{2n+1} = 0$$

— Reste à s'assurer qu'une telle série entière a effectivement un rayon non nul. Vu la forme des coefficients, il est naturel d'essayer d'Alembert, ce qui donne $R = 1$.

— Enfin, sur un intervalle où $(1 - x^2)$ ne s'annule pas, Cauchy-Lipschitz assure l'unicité d'une solution telle que $f'(0) = 0 = a_0$ et $f'(1) = 1 = a_1$.

3. Evidemment, les brutes se lanceront dans la recherche d'une équa diff' et certainement en trouveront une... Il pourtant tellement plus simple et moins ridicule de se rappeler que :

$$(\sin x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Le reste est trivial !

Enoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz (*cas scalaire ici*) :

Soit $(n + 2)$ réels quelconques $t_0, x_0, ..., x_n$. Soit $f : \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que :

1. f est continue par rapport **au couple** (t, x).
2. f est localement lipschitzienne **en** x.

Alors, il existe une **unique** solution **maximale** ϕ de l'équation différentielle : $\phi^{(n)} = f(t, \phi, \phi', ..., \phi^{(n-1)})$ définie sur un voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ **telles que** :

$$\phi(t_0) = x_0 \ , \ \phi'(t_0) = x_1 \ , \ ... \ , \ \phi^{(n-1)}(t_0) = x_n$$

DSE de la fonction inverse

Soit f une fonction DSE au voisinage de zéro et telle que $f(0) \neq 0$. Démontrer qu'il en est de même pour la fonction $g = \frac{1}{f}$.

On évacue assez rapidement l'envie de chercher à utiliser des fonctions usuelles. Chercher une équation différentielle pourrait aussi être une idée, mais l'allure de g' n'augure rien de bon quant aux dérivées n-ièmes... Du coup, travailler avec Taylor semble complexe aussi. Essayons d'obtenir (par récurrence) une majoration des coefficients du DSE.

Quitte à diviser f par $f(0)$, on peut toujours supposer que $f(0) = 1$.

Soient a_n et b_n les coefficients respectifs des DSEs de f et g (si ce dernier existe).

— La relation $fg = 1$ donne en remplaçant :

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n > 0, b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k.b_{n-k}$$

— Soit $0 < r < R$ (rayon de convergence de la série entière de f) ; par définition la série entière est convergente, donc son terme général est borné et il existe M tel que :

$$\forall n, |a_n r^n| < M$$

On a alors :

$$|b_1| = |a_1| < \frac{M}{r} \text{ et } |b_2| = |a_0 b_1 + a_1 b_0| < \frac{M(M+1)}{r}$$

On montre alors facilement par récurrence **FORTE** que :

$$|b_n| < \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^{n-1}}$$

— D'où il ressort que pour tout complexe z,

$$|b_n z^n| < \frac{Mr}{M+1}.|\frac{M+1}{r}z|^n$$

donc, pour $|z| < \frac{r}{M+1}$ la série entière$\sum b_n z^n$ converge, ce qui prouve que celle-ci a un rayon de convergence non nul. CQFD.

Une petite somme
Sommer $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$

Le rayon n'est peut-être pas immédiat sous cette forme de f, mais plus évident si l'on distingue les indices selon leur parité :

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} 2p.x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

Alors, $R = 1$ (par opération sur des séries entières : en effet, les deux séries ayant même rayon, la somme a le rayon commun). Le second terme lui est **exactement** (encore faut-il le reconnaître) Argth x. Quant au premier terme, on y fait apparître aisément une dérivée :

$$\sum_{p=1}^{\infty} 2px^{2p} = x\sum_{p=0}^{\infty} 2px^{2p-1} = x.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\sum_{p=0}^{\infty}(x^2)^p) = \frac{2.x^2}{(1-x^2)^2}$$

d'où la valeur de f :

$$f(x) = Argth(x) + \frac{2.x^2}{(1-x^2)^2}$$

Une propriété sur une fonction de classe infinie
Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[0, a]$ telle que :

$$\forall n, \forall x \in [0, a], f^{(n)}(x) \geq 0$$

Montrer que f est DSE en chaque point de $[0, a]$.

Il ne s'agit pas ici d'un exercice calculatoire, mais théorique ! (Donc, tenter de se rapprocher de fonctions usuelles ou bien tenter d'appliquer la méthode de l'équation diffeerentielle seront des tentatives évidemment inutiles...) Il semble donc indiquer d'utiliser la méthode du développement de Taylor.

Soit $S_n(x)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Taylor de f. Il est immédiat que pour x dna s[0,a], la suite $S_n(x)$ est positive. Il suffit de prouver qu'elle tend vers $f(x)$ en tout point. Il va donc falloir obtenir une meilleure majoration des dérivées n-ièmes en 0.

— Ecrivons $f(x + a) - f(x) = S_n(a) + R_n(a)$ avec $R_n(a)$ le reste de Lagrange, positif. La somme de droite ne contenant que des termes positifs est minorée par l'un quelconque de ces termes, donc :

$$S_n(a) + R_n(a) \geq \frac{f^{(n)}(0)}{n!}a^n$$

Le terme $f(x+a) - f(x)$ étant majorée par $M = 2.\sup\limits_{[0,a]}|f(x)|$, il vient :

$$|f^{(n)}(0)| \leq M\frac{n!}{a^n}$$

— Taylor-Lagrange fournit enfin :

$$|f(x) - S_n(x)| \leq M(\frac{x}{a})$$

Le majorant tend vers 0 pour $x < a$ ce qui assure que la série de Taylor converge bien vers f sur [0,a[.

Taylor-Lagrange – Supposons que f soit de classe C^{n+1} sur I. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que l'on ait :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$

(*notons ici que θ dépend de h*)

Théorème de Tauber

Soit une série réelle $\sum a_n$. On définit alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

et pour n non nul :

$$T_n = \frac{S_0 + S_1 + ... + S_n}{n+1}$$

On suppose que la suite (T_n) est convergente vers L. On définit en outre les sommes de deux séries entières :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1).T_n.x^n$$

1. Etablir que g est définie pour x dans $]-1,1[$.
2. En déduire que : $\sum S_n x^n$ est définie pour x dans $]-1,1[$.
3. Exprimer f en fonction de g.
4. En déduire que f est définie sur $]-1,1[$, et tend vers L quand x tend vers 1.

---

1. (T_n) converge, donc elle est bornée par M et :

$$|(n+1)T_n x^n| \leq M(n+1)|x|^n$$

et la série majorante converge pour x dans]-1,1[.

2. Il est naturel de cherche à relier S et T :

$$S_n = (n+1)T_n - nT_{n-1}$$

d'où :

$$|S_n x^n| \leq 2M(n+1)|x|^n$$

et la série majorante converge pour x dans]-1,1[.

3. Les transformations d'Abel sautent aux yeux :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S_{n-1})x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)T_n nT_{n-1})x^n = (1-x)^2 g(x)$$

4. Pour majorer $(f(x) - L)$, il faut rendre cette expression homogène (confer les *homogénéisation de différences*). Il est judicieux d'écrire :

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

et donc d'écrire :

$$f(x) - L = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(T_n - L)x^n$$

Passons alors aux ϵ. (T_n) tend vers L donc pour $n > N$, $|T_n - L| < \epsilon$. En remarquant que pour $1 > x > 0$:

$$(1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} (n+1)x^n \leq (1-x)^2 \sum n = 0^{\infty} (n+1)x^n = 1$$

On a :

$$\forall x \in]0,1[, \forall n > N, |f(x) - L| < (1-x)^2 \sum n = 0^{N-1} (n+1)|T_n - L| + \epsilon = \text{Constante } + \epsilon$$

La première partie du majorant tend vers zéro quand x tend vers 1, ce qui prouve que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers 1.

Chapitre 9

Séries de Fourier

Chapitre 10

Equations Différentielles

10.1 Equations Linéaires du Premier Ordre

10.1.1 Résolution pratique

Premier ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$;
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$;
3. $y' + y = xe^{-x}$;
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$;

---

1. On résoud d'abord l'équation sans second membre $7y' + 2y = 0$. La solution générale est de la forme $y(x) = Ke^{-2x/7}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors P est une solution de l'équation si et seulement si

   $$7(3ax^2+2bx+c)+2(ax^3+bx^2+cx+d) = 2x^3-5x^2+4x-1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   Par identification, on trouve le système

   $$\left\{\begin{array}{rcl} 2a & = & 2 \\ 21a + 2b & = & -5 \\ 14b + 2c & = & 4 \\ 7c + 2d & = & -1 \end{array}\right.$$

   On résoud ce système et on trouve qu'une solution particulière est donnée par $x^3 - 13x^2 + 93x - 326$. L'ensemble des solutions de l'équation est donnée par les fonctions

   $$x \mapsto x^3 - 13x^2 + 93x - 326 + Ke^{-2x/7} \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

2. On résoud l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ dont la solution générale est λe^{-2x}. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2, $y(x) = ax^2+bx+c$. Sans difficulté, on trouve $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.
3. On résoud d'abord l'équation sans second membre $y' + y = 0$ qui donne $y(x) = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution de l'équation complète sous la forme $y(x) = P(x)e^{-x}$, avec P un polynôme. y est solution de l'équation si et seulement si $P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + P(x)e^{-x} = xe^{-x}$, si et seulement si $P'(x) = x$. Une solution particulière de l'équation complète est donc $\frac{x^2}{2}e^{-x}$, l'ensemble des solutions de l'équation étant donné par les fonctions
$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right) e^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$
4. La solution générale de l'équation sans second membre est $y(x) = Ke^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$. Ensuite, on cherche une solution particulière de l'équation $y' - 2y = \cos x$. Pour cela, on écrit que $\cos x = \Re e(e^{ix})$ et on cherche une solution de $y' - 2y = e^{ix}$. On la cherche sous la forme d'une exponentielle-polynôme de degré 0, puisque $i \neq 2$. La fonction $y(x) = \alpha e^{ix}$ est solution de $y' - 2y = e^{ix}$ si et seulement si
$$i\alpha e^{ix} - 2\alpha e^{ix} = e^{ix}$$
ie si et seulement si $\alpha = -\frac{2+i}{5}$. Une solution particulière de $y' - 2y = \cos x$ est donc donnée par
$$\Re e\left(\frac{2+i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$
On cherche ensuite une solution particulière de $y' - 2y = 2\sin x$ en utilisant exactement la même méthode, mais en remarquant que cette fois $\sin x = 2\Im m(e^{ix})$. Une solution particulière est donc donnée par
$$2\Im m\left(\frac{2+i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{4}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x.$$
Par le principe de superposition des solutions, on trouve finalement que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donnée par les fonctions
$$x \mapsto Ke^{2x} - \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Varions la constante...
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$ sur $] - 1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

---

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$. La méthode de variation de la constante donne :
$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x} \implies \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$
Une solution particulière est donc donné par $y(x) = \ln(1 + e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par
$$x \mapsto \ln(1 + e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y'+y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \frac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$. On obtient
$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1 + x).$$
Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1 + x)\ln(1 + x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par
$$x \mapsto \frac{\lambda}{1 + x} + \ln(1 + x).$$

3. On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - \frac{y}{x} = 0$. On remarque que $x \mapsto x$ est une solution. L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc les fonctions $x \mapsto Cx$, $C \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)x$. Reportant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation $\lambda'(x) = x$, ce qui donne $\lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc donné par les fonctions
$$x \mapsto Cx + \frac{x^3}{2}.$$

4. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - 2xy = 0$. On a

$$y' - 2xy = 0 \iff \frac{y'}{y} = 2x \iff \ln|y| = x^2 + C,$$

et donc la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{x^2}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$.

5. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$

Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2.$$

Avec une condition initiale
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$, $y(0) = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$;
2. $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1$ sur $]-1, +\infty[$ (on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme).

---

1. La solution générale de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto \lambda \cos t$, $\lambda \in \mathbb{R}$, une solution particulière, que l'on trouve facilement par la méthode de variation de la constante, est la fonction $t \mapsto \cos^2 t$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions vérifiant $t \mapsto \lambda \cos t - 2\cos^2 t$. On cherche la solution valant 1 en 0. On trouve $\lambda - 2 = 1$, soit $\lambda = 3$. Ainsi, la solution recherchée est la fonction

$$t \mapsto -2\cos^2 t + 3\cos t.$$

2. La résolution de l'équation homogène amène à chercher une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-x}{x+1}$. Pour cela, il suffit d'écrire
$$\frac{-x}{x+1} = \frac{-x-1+1}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}.$$
Les solutions de l'équation homogène, sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(x+1)e^{-x}$. On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme d'un polynôme. Or, si P est un polynôme, le degré de $(x+1)y'+xy$ vaut le degré de P plus 1. On cherche donc y sous la forme d'un polynôme de degré 1, soit $y(x) = ax+b$. Introduisant cela dans l'équation différentielle, on trouve
$$(x+1)a + x(ax+b) = x^2 - x + 1.$$
Par identification, on trouve $a = 1$, $a+b = -1$, soit $b = -2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $x \mapsto (x-2)+\lambda(x+1)e^{-x}$. La solution vérifiant $y(1) = 1$ est obtenue pour $\lambda = e$.

Plus difficile...
Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = |y-x|$.

Soit y une solution de l'équation. On cherche donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant l'équation. Soit J un intervalle sur lequel $y-x$ est de signe constant. Sur cet intervalle J, y vérifie une des deux équations différentielles suivantes :
$$y' = y - x \text{ ou } y' = -y + x.$$
On va commencer par résoudre $y' = y-x$. L'équation homogène est $y'-y = 0$, dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^x$. Une solution particulière est obtenue sous la forme d'un polynôme de degré 1. On trouve que $x+1$ est solution. Les solutions de $y' = y-x$ sont donc les fonctions $y(x) = x+1+\lambda e^x$. Une étude similaire permet de résoudre $y' = -y+x$. On trouve que les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $y(x) = x-1+\mu e^{-x}$. Revenons maintenant à l'équation initiale. Les solutions de $y' = y-x$ vérifient $y(x) \geq x$

— sur $\mathbb{R}$ si $\lambda > 0$;

— sur $]-\infty, -\ln(-\lambda)[$ si $\lambda < 0$.

Les solutions de $y' = -y+x$ vérifient $y(x) \leq x$

— sur $\mathbb{R}$ si $\mu < 0$;

— sur $]-\ln(\mu), +\infty[$ si $\mu > 0$.

D'autre part, pour $\lambda = -\mu < 0$, les fonctions $y_1(x) = (x+1) + \lambda e^x$ et $y_2(x) = (x-1) - \lambda e^{-x}$ se recollent bien en $\ln(-\lambda)$. En effet, elles vérifient $y_1(\ln(-\lambda)) = y_2(\ln(-\lambda)) = 0$ et

$$y_1'(\ln(-\lambda)) = 1 + \lambda(\ln(-\lambda))$$

$$y_2'(\ln(-\lambda)) = 1 - \lambda(-\ln(-\lambda))$$

et donc $y_1'(\ln(-\lambda)) = y_2'(\ln(-\lambda))$. On obtient donc trois familles de solutions sur $\mathbb{R}$:

1. les fonctions $y(x) = x + 1 + \lambda e^x$ pour $\lambda > 0$;
2. les fonctions $y(x) = x - 1 + \mu e^{-x}$ pour $\mu < 0$;
3. les fonctions $y(x) = (x+1) + \lambda e^x$ sur $]-\infty, -\ln(-\lambda)]$ et $y(x) = x - 1 - \lambda e^{-x}$ sur $[-\ln(-\lambda), +\infty[$.

10.1.2 Applications

Triplement d'une population

L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnelle à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

L'accroissement de la population est mesurée par $P'(t)$, qui est donc proportionnelle à $P(t)$. Autrement dit, P vérifie une équation différentielle du type $P'(t) = kP(t)$. Sa solution est de la forme $P(t) = Ce^{kt}$. De l'autre information (la population double tous les 50 ans), on déduit que $P(t+50) = 2P(t)$ pour tout t. Ainsi, on a

$$Ce^{kt}e^{50k} = 2Ce^{kt} \implies 50k = \ln 2 \implies k = \ln 2/50.$$

On cherche x tel que $P(t+x) = 3P(t)$ pour tout P. Ceci donne

$$Ce^{kt}e^{kx} = 3Ce^{kt} \implies kx = \ln 3 \implies x = \frac{50 \ln 3}{\ln 2} \simeq 79,24.$$

La population triple environ tous les 79 ans un quart.

Dissolution d'un composé chimique

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5min plus tard, il reste 10g. Dans combien de temps restera-t-il seulement 1g ?

On note $x(t)$ la quantité restante en fonction du temps, de sorte que $x(0) = 20$. Du fait que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité restante, on tire qu'il existe $\alpha > 0$ de sorte que x est solution de l'équation différentielle

$$-x'(t) = \alpha x(t).$$

La résolution de cette équation différentielle donne $x(t) = Ce^{-\alpha t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. De $x(0) = 20$ on tire $C = 20$. Puis, de $x(5) = 10$, on tire

$$20e^{-5\alpha} = 10 \iff \alpha = \frac{1}{5}\ln 2.$$

La quantité restante vaut donc $x(t) = 20\exp(-(\ln 2)t/5)$. On cherche enfin t_0 de sorte que $x(t_0) = 1$. Il vient

$$20\exp(-(\ln 2)t_0/5) = 1 \iff -(\ln 2)t_0/5 = -\ln 20 \iff t_0 = \frac{5\ln 20}{\ln 2}.$$

Recherche de courbes
Trouver les courbes d'équation $y = f(x)$, avec f de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vérifiant la propriété géométrique suivante : si M est le point courant de la courbe, T l'intersection de la tangente à la courbe en M avec l'axe (Ox), et P le projeté orthogonal de M sur (Ox), alors O est le milieu de $[PT]$.

Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe. La tangente en M a pour équation $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$. L'abscisse de T est donc $x - f(x)/f'(x)$. Pour que O soit le milieu de $[PT]$, il est nécessaire et suffisant que $0 = x - f(x)/f'(x) + x$. f est donc solution de l'équation différentielle

$$2xf'(x) = f(x).$$

On résoud cette équation différentielle, et on trouve que ses solutions sont les fonctions $f(x) = C\sqrt{x}$.

Une équation fonctionnelle
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant, pour tous $s, t \in \mathbb{R}^2$,

$$f(s + t) = f(s)f(t).$$

Faisant $s = t = 0$, on remarque que $f(0)^2 = f(0)$, et donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, faisant $s = 0$, on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = f(0)f(t) = 0.$$

On peut donc supposer $f(0) = 1$. On repart alors de la relation initiale, on fixe la variable s à une valeur quelconque de $\mathbb{R}$, et on dérive par rapport à t. On obtient

$$f'(s+t) = f(s)f'(t).$$

On évalue en $t = 0$, et on trouve

$$f'(s) = f(s)f'(0).$$

Ainsi, f est solution d'une équation différentielle $y' = \alpha y$. On en déduit que f est de la forme $f(x) = Ce^{\alpha x}$. Pour que $f(0) = 1$, il est nécessaire que $C = 1$. Réciproquement, on vérifie aisément que la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sont bien solutions de l'équation fonctionnelle.

Où est l'équation différentielle ?
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On pose $g = f + f'$. Alors f est solution de l'équation différentielle $f + f' = g$. On résoud cette équation. L'équation homogène est $f' + f = 0$ dont la solution générale est donnée par λe^{-x}. On résoud l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : en posant $f(x) = \lambda(x)e^{-x}$, on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x} = g(x),$$

et une solution particulière est donnée par

$$f_0(x) = e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt.$$

Finalement, toute fonction f vérifiant $f + f' = g$ s'écrit

$$f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt.$$

Pour montrer que f tend vers 0 en $+\infty$, il suffit de prouver que $e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on va utiliser que g tend vers 0 en $+\infty$, et on va couper l'intégrale en 2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour $t > A$, on a $|g(t)| \leq \varepsilon$. Soit $M = \int_0^A |g(t)e^{-t}|dt$ et soit $B \geq A$ tel que, pour $x \geq B$, on a $e^{-x}M \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq b$, il vient

$$\begin{aligned}
\left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^{-t}dt\right| &\leq e^{-x}\int_0^A |g(t)e^{-t}|dt + e^{-x}\int_A^x |g(t)|e^{-t}dt \\
&\leq e^{-x}M + e^{-x}\int_A^x \varepsilon e^{-t}dt \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

On a bien prouvé que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Une équation intégrale
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2.$$

Posons $y(x) = \int_0^x f(t)dt$, qui est dérivable sur $[0, +\infty[$. Alors, dérivant l'équation, on a

$$\frac{1}{2}f^2(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 + \frac{2}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)f(x)$$

soit

$$\frac{1}{2}y'^2 = -\frac{1}{x}^2 y^2 + \frac{2}{x}yy'.$$

Remarquons que si $y(x_0) = 0$, alors $\int_0^{x_0} f^2(t)dt = 0$, et donc $f = 0$ sur $[0, x_0]$ puisque l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement s'il s'agit de la fonction nulle. En particulier, y est aussi identiquement nulle sur $[0, x_0]$.
Posons $a = \sup\{x > 0; y(x) = 0\}$ avec $a = 0$ si l'ensemble est vide. Alors y est non-nulle sur $]a, +\infty[= I$, et sur cet intervalle l'équation peut encore s'écrire

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{4}{x}\frac{y'}{y} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

On résoud cette équation du second degré, et on trouve

$$\frac{y'}{y} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{x}$$

soit

$$y(x) = \lambda x^{2\pm\sqrt{2}}.$$

Revenant à $f = y'$, on trouve sur I que

$$f(x) = \lambda x^{1\pm\sqrt{2}}.$$

Maintenant, f doit être continu en a, et on sait que $f(a) = 0$. Ceci n'est possible que si $a = 0$ et si $f(x) = \lambda x^{1+\sqrt{2}}$. Ces fonctions sont donc les solutions de l'équation intégrale.

Calcul d'une transformée de Fourier par résolution d'une équation différentielle

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \pi/2$.

On remarque d'abord que f est bien définie pour tout x. En effet, on a

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$, car en 0 elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann), et, au voisinage de $+\infty$, elle vérifie

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Prouvons également que f est de classe C^1. Pour cela, on remarque que la fonction

$$g : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}$$

admet en tout point de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x égale à

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t} e^{-t} e^{itx}.$$

De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq \sqrt{t} e^{-t}$$

et la fonction apparaissant à droite dans l'inégalité précédente est intégrable sur $]0,+\infty[$ (elle est continue en 0, et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $1/t^2$). On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que f est dérivable, avec

$$f'(x)=\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

On exprime le membre de droite de cette égalité en fonction de f grâce à une intégration par parties, en posant $v(t)=\sqrt{t}$ et $u(t)=\frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}$. Puisque $u(0)v(0)=0$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t)=0$, on en déduit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-i}{2(ix-1)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt\\ &= \frac{-i(-ix-1)}{2(x^2+1)}f(x)\\ &= \frac{x+i}{2(x^2+1)}f(x). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation différentielle. On l'écrit sous la forme

$$\frac{f'}{f}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{i}{2(x^2+1)}$$

ce qui donne

$$\ln|f|=\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{i}{2}\arctan(x)+K.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que

$$f(x)=C(x^2+1)^{1/4}\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right).$$

On détermine la valeur de la constante C en calculant $f(0)=C$. On a par ailleurs

$$f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$$

en effectuant le changement de variables $t=u^2$. Utilisant le rappel, on trouve que $C=\sqrt{\pi}$.

10.2 EDL : Session théorique

Tangentes aux courbes intégrales

Soit l'équation $y'=a(x)y+b(x)$, avec $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues, et soit $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que les tangentes au point d'abscisse x_0 aux courbes intégrales sont ou bien parallèles ou bien concourantes.

Soit y une solution de l'équation. Sa tangente au point d'abscisse x_0 a pour équation

$$y - y(x_0) = \big(a(x_0)y(x_0) + b(x_0)\big)(x - x_0).$$

Par tout point (x_0, λ) il passe une courbe intégrale (ou encore il y a une unique solution avec $y(x_0) = \lambda$), et il s'agit de démontrer que toutes les droites de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, où (D_λ) est la droite d'équation

$$y - \lambda = \big(a(x_0)\lambda + b(x_0)\big)(x - x_0)$$

sont parallèles ou concourantes. Si $a(x_0) = 0$, il est clair qu'elles sont parallèles, et parallèles à $y = b(x_0)x$. Sinon, cherchons le point d'intersection, pour $\lambda \neq \mu$, de D_λ et D_μ. On doit résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} y - \lambda & = & \big(a(x_0)\lambda + b(x_0)\big)(x - x_0) \\ y - \mu & = & \big(a(x_0)\mu + b(x_0)\big)(x - x_0) \end{array}\right.$$

On trouve que le point d'intersection a pour coordonnées $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, \frac{-b(x_0)}{a(x_0)}\right)$. Il ne dépend pas de λ ni de μ. Toutes les droites D_λ passent par ce point !

Solution qui s'annule

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. On se propose de démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annulent. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

1. Justifier que f est de signe constant. Dans la suite, quitte à changer f en $-f$, on supposera $f > 0$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Justifier que la courbe représentative de f est en-dessous de sa tangente en $(a, f(a))$.
3. En déduire que $f'(a) = 0$.
4. Conclure.

---

1. Si f ne gardait pas un signe constant, puisqu'elle est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annulerait.
2. Puisque $f'' = -pf$, $f'' \leq 0$ et donc f est concave. Sa courbe représentative est donc en-dessous de ses tangentes.

3. Si $f'(a) \neq 0$, alors f deviendrait négative puisque, d'après la question précédente, elle est majorée sur $\mathbb{R}$ par une fonction affine de pente non nulle.
4. a étant arbitraire, f est constante. Or, puique p n'est pas identiquement nulle, on sait qu'il existe un réel $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(x_0) \neq 0$. Dans ce cas, on a forcément $f(x_0) = 0$, alors qu'on a supposé que f ne s'annule pas.

Solutions bornées
Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'(t) - a(t)y(t) = 0$ sont bornées.

Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y(t) = C \exp\big(A(t)\big)$ avec $A(t) = \int_0^t a(t)dt$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|A(t)| \leq \left|\int_0^t |a(u)|du\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |a(u)|du.$$

Ainsi, y est bornée par $C \exp\left(\int_{\mathbb{R}} |a(u)|du\right)$.

Solutions bornées
Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

L'équation caractéristique $r^2+ar+b = 0$ a pour discriminant $\Delta = a^2-4b$. On distingue alors les trois cas :

— Si $\Delta > 0$, les deux solutions seront bornées si et seulement si les deux racines de l'équation sont négatives, c'est-à-dire si leur somme (égale à $-a$) est négative, et leur produit (égal à b) est positif. La condition qui apparaît donc dans ce cas est $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

— Si $\Delta = 0$, alors les solutions sont bornées si et seulement si $a > 0$.

— Si $\Delta < 0$, alors les solutions sont bornées si et seulement si les racines de l'équation caractéristique sont de partie réelle négative, soit $a \geq 0$.

Remarquons aussi qu'il faut avoir nécessairement $b \geq 0$ pour que $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$. Ainsi, en résumant, les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont toutes bornées si et seulement si $a, b \geq 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Comportement à l'infini d'une solution

Prouver que toute solution de l'équation différentielle $y'+e^{x^2}y=0$ admet une limite nulle en $+\infty$.

On sait que toute solution s'écrit sous la forme

$$y(x)=ke^{A(x)} \text{ avec } A(x)=-\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

Or, pour $t\geq 0$, on a $e^{t^2}\geq 1$ d'où l'on déduit que pour $x\geq 0$,

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt\geq\int_0^x 1=x.$$

On en déduit que $A(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc par composition et produit que $y(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Fonction non-solution d'une équation différentielle

Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t)=e^{-1/t^2}$ et prolongée par $f(0)=0$ est de classe C^∞, mais n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.

Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. On montre aisément par récurrence sur n que ses dérivées sont de la forme

$$t\mapsto P_n(t)e^{-1/t^2},$$

où les P_n sont des polynômes. Ainsi, pour chaque entier n, $f^{(n)}$ admet une limite en 0 égale à 0. Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^∞, avec $f^{(n)}(0)=0$. Si f était solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n,

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=0,$$

elle vérifierait aussi la condition initiale $y(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0$. Or, d'après le théorème de Cauchy linéaire, cette équation n'admet qu'une seule solution pour ce problème de Cauchy. Comme 0 est solution et que f n'est pas identiquement nulle, on obtient une contradiction.

Solutions bornées

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On considère l'équation $y'' + f(t)y = 0$.

1. Soit y une solution bornée de l'équation. Montrer que y' tend vers 0 en $+\infty$.
2. Soit y_1, y_2 deux solutions. Montrer que leur déterminant wronskien $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ est constant.
3. En déduire que l'équation admet une solution non bornée.

---

1. Soit y une solution bornée. On a, pour tout $t > 0$,
$$y'(t) - y(0) = \int_0^t y''(u)du = -\int_0^t f(u)y(u)du.$$
Or, la fonction fy, produit d'une fonction intégrable et d'une fonction bornée, est elle-même intégrable, et donc $y'(t) = \int_0^t f(u)y(u)$ admet une limite au voisinage de $+\infty$. Cette limite ne peut être que nulle. En effet, si $y(t) \to \ell$ avec par exemple $\ell > 0$, alors il existe $A > 0$ tel que $y'(t) \geq \ell/2$ pour $t \geq A$. Mais alors
$$y(t) - y(A) \geq \ell(t - A)/2$$
et donc y ne peut pas être bornée.
2. Il suffit de dériver W :
$$W'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) = -f(t)y_1(t)y_2(t) + f(t)y_1(t)y_2(t) = 0.$$
La dérivée de W' est nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc W est constant sur $\mathbb{R}_+$.
3. Supposons que toutes les solutions soient bornées, et considérons deux solutions indépendantes y_1 et y_2. Alors leur déterminant wronskien est constant, et non nul puisque les deux solutions sont indépendantes. Mais, puisque y_1' et y_2' tendent vers 0 en $+\infty$, on en déduit que $W(t)$ tend aussi vers 0 en $+\infty$. C'est bien sûr une contradiction, et donc il existe des solutions non-bornées.

Solutions périodiques

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1. A quelle(s) condition(s) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ admet-elle des solutions 1-périodiques. Les déterminer.

La solution générale de l'équation s'écrit

$$y(x)=\left(\alpha+\int_0^x b(t)e^{-A(t)}dt\right)e^{A(x)}$$

où $A(x)=\int_0^x a(t)dt$. Notons que

$$A(x+1)=A(x)+\int_x^{x+1}a(t)dt=A(x)+\int_0^1 a(t)dt,$$

et posons $\lambda=\int_0^1 a(t)dt$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
y(x+1) &= \left(\alpha+\int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt+\int_1^x b(t)e^{-A(t)}dt\right)e^{A(x+1)}\\
&= \left(\alpha+\int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt+\int_0^x b(t)e^{-\lambda-A(t)}dt\right)e^{A(x)+\lambda}\\
&= y(x)+\left(\alpha(e^\lambda-1)+\mu e^\lambda\right)e^{A(x)}
\end{aligned}$$

où on a posé $\mu=\int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt$. Autrement dit, f est $1-$périodique si et seulement

$$\alpha(e^\lambda-1)+\mu e^\lambda=0.$$

Si $\lambda\neq 0$, l'équation admet une unique solution $1-$périodique, donnée par

$$\alpha=\frac{\mu e^\lambda}{1-e^\lambda}.$$

Si $\lambda=0$ et $\mu=0$, alors toute solution est 1-périodique.
Si $\lambda=0$ et $\mu\neq 0$, alors il n'y a aucune solution 1-périodique.

Solutions impaires
Soit $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle

$$(E)\ y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$$

admet une unique solution impaire.

Il y a deux clés pour résoudre cet exercice :
— toute fonction impaire vaut 0 en 0 ;

— L'équation différentielle (E) admet une unique solution y_0 vérifiant $y_0(0) = 0$.

Ceci montre déjà l'unicité : s'il y a une fonction y impaire solution de (E), elle vérifie $y(0) = 0$ et doit donc être égale à y_0. Réciproquement, on doit prouver que y_0 est impaire. On va poser $z(t) = -y_0(-t)$. z est solution de (E). En effet,

$$z'(t) + a(t)z(t) = y_0'(-t) - a(t)y_0(-t) = y_0'(t) + a(-t)y_0(t) = b(-t) = b(t),$$

car y_0 est solution de (E), a est impaire et b est paire. z est donc solution de (E), et satisfait de plus $z(0) = 0$. Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, z est égale à y_0, et donc y_0 est paire.
On pouvait aussi prouver que y_0 est impaire, en cherchant à résoudre l'équation différentielle par la méthode usuelle (solution de l'équation homogène à l'aide de l'exponentielle et d'une primitive de a, puis méthode de variation de la constante).

Solutions périodiques d'équations différentielles

Dans cet exercice, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine, et φ une fonction paire, de classe C^∞ sur I. On note (E) l'équation différentielle homogène

$$y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0.$$

On note f_0 l'unique solution de (E) sur I vérifiant les conditions initiales $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$, et f_1 l'unique solution vérifiant les conditions initiales $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$.

1. (a) Démontrer que si y est solution de (E) sur I, alors y est de classe C^∞.

   (b) Démontrer que si y est solution de (E) sur I, alors $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution de (E) sur I.

   (c) Démontrer que f_0 est une fonction paire et que f_1 est une fonction impaire.

   (d) Exprimer la solution générale de (E) sur I à l'aide de f_0 et de f_1. En déduire, parmi les solutions de (E), celles qui sont paires et celles qui sont impaires.

2. On suppose désormais que $I = \mathbb{R}$ et que φ est 2π-périodique.

   (a) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $x \mapsto y(x + 2\pi)$ est encore solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire qu'il existe des constantes w_{00}, w_{01}, w_{10} et w_{11}, que l'on déterminera en fonction des valeurs prises par f_0, f_0', f_1 et f_1' en 2π, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$\begin{cases} f_0(x+2\pi) &= w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x) \\ f_1(x+2\pi) &= w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x). \end{cases}$$

(c) Soit W la matrice carrée d'ordre 2 définie par $W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}$. Montrer que, pour que (E) admette sur $\mathbb{R}$ des solutions non identiquement nulles 2π-périodiques, il faut et il suffit que W admette 1 pour valeur propre. On pourra exprimer une telle solution g en fonction de f_0 et f_1, puis utiliser la périodicité de g.

---

1. (a) On démontre par récurrence sur $k \geq 2$ que y est C^k. Pour $k = 2$, $y'' = -\varphi y$ est continue, donc y est C^2. Supposons la propriété démontrée au rang k et prouvons-là au rang $k+1$. Si y est C^k, alors $y'' = -\varphi y$ est aussi C^k. En particulier, y est C^{k+1}.

(b) Posons $f(x) = y(-x)$, de sorte que $f'(x) = -y'(-x)$ et $f''(x) = y''(-x)$. On a donc

$$f''(x)+\varphi(x)f(x) = y''(-x)+\varphi(x)y(-x) = y''(-x)+\varphi(-x)y(-x) = 0$$

et donc f est aussi solution de l'équation différentielle.

(c) Posons $g_0(x) = f_0(-x)$, solution de l'équation différentielle sur I. Elle vérifie de plus les mêmes conditions initiales que f_0, à savoir $g_0(0) = f_0(0) = 1$ et $g_0'(0) = -f_0(0) = 0$. Ainsi, $f_0 = g_0$ et f_0 est paire. Pour prouver que f_1 est impaire, on pose $g_1(x) = -f_1(-x)$, et on vérifie que g_1 est solution de l'équation avec les mêmes conditions initiales que f_1.

(d) Remarquons que (f_0, f_1) est une famille libre. En effet, si $f_1 = Cf_0$, alors $f_1' = Cf_0'$ et ceci est incompatible avec $f_1'(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$. Ainsi, la famille (f_0, f_1) est une base de l'ensemble des solutions de (E). Donc la solution générale de (E) s'écrit $\lambda f_0 + \mu f_1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons y une telle solution. Pour qu'elle soit paire, il faut que $y(-x) = y(x)$. Mais,

$$y(-x) = \lambda f_0(x) - \mu f_1(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x) = y(x).$$

La famille (f_0, f_1) étant libre, on en déduit que $\mu = -\mu$, soit $\mu = 0$, et seuls les multiples de f_0 sont solutions paires de l'équation. De même, seuls les multiples de f_1 sont solutions impaires de l'équation.

2. (a) Il s'agit d'une vérification immédiate.
   (b) Puisque $x \mapsto f_0(x+2\pi)$ est solution de l'équation, on sait qu'il existe des constantes w_{00} et w_{10} telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f_0(x+2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x).$$
   Faisant $x = 0$, on trouve $w_{00} = f_0(2\pi)$. Dérivant l'équation, et faisant $x = 0$, on trouve $w_{10} = f_0'(2\pi)$. On utilise le même raisonnement pour f_1.
   (c) Soit y une solution de (E), $y = \lambda f_0 + \mu f_1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$y(x+2\pi) = (\lambda w_{00} + \mu w_{01})f_0(x) + (\lambda w_{10} + \mu w_{11})f_1(x).$$
   Puisque (f_0, f_1) est une base de solutions de (E), y est une solution 2π-périodique si et seulement si
   $$\begin{cases} \lambda w_{00} + \mu w_{01} = \lambda \\ \lambda w_{10} + \mu w_{11} = \mu \end{cases}$$
   Autrement dit, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ est vecteur propre de W pour la valeur propre 1. Réciproquement, si $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ est vecteur propre de W pour la valeur propre 1, alors $y = \lambda f_0 + \mu f_1$ est solution 2π-périodique de (E).

Zéros isolés

Soient $a_1, \dots, a_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution non-nulle de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = 0$ a ses zéros isolés.

Soit y une solution non-nulle de l'équation et soit t_0 un zéro de y. Remarquons que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation. D'après la partie unicité du théorème de Cauchy (dans sa version linéaire adaptée aux équations d'ordre p), on est sûr qu'il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $y^{(k)}(t_0) \neq 0$ (sinon y serait la fonction nulle). Soit p le plus petit des entiers k tel que $y^{(k)}(t_0) \neq 0$. Alors, d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de t_0, on a
$$y(t) \sim_{t_0} \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p.$$
Ainsi, la fonction ne s'annule pas dans un voisinage de t_0 ailleurs qu'en t_0.

Au moins/au plus un zéro !

Soit $p : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ une fonction continue.

1. Soit y une solution de l'équation différentielle $y'' + py = 0$. Montrer que y s'annule au moins une fois.
2. Soit z une solution de l'équation différentielle $z'' - pz = 0$. Montrer que z est identiquement nulle, ou que z s'annule au plus une fois.

---

1. On considère une solution y de l'équation différentielle qui ne s'annule pas. Quitte à changer y en $-y$, on peut supposer $y > 0$, et donc $y'' \leq 0$. On en déduit que la fonction y' est décroissante. De plus, y' n'est pas identiquement nulle, car sinon y'' le serait, et donc, puisque $y''+py = 0$ et y ne s'annule pas, p serait aussi identiquement nul ce qui n'est pas. Soit donc un point a tel que $y'(a) \neq 0$.
   — Si $y'(a) > 0$ alors $y'(t) \geq y'(a)$ pour $t < a$, et donc, toujours pour $t < a$, on aurait
   $$y(a) - y(t) = \int_t^a y'(u)du \geq (a - t)y'(a)$$
   et donc
   $$y(t) \leq y(a) + (t - a)y'(a)$$
   ce qui prouve que $y(t)$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$, ce qui contredit $y > 0$.
   — Si $y'(a) < 0$, alors $y'(t) \leq y'(a) < 0$ pour $t \geq a$, d'où on tire, pour $t \geq a$,
   $$y(t) - y(a) = \int_a^t y'(u)du \leq y'(a)(t - a)$$
   ce qui prouve que $y(t)$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, ce qui contredit $y > 0$.

   Dans tous les cas, on obtient une contradiction. C'est donc que y doit s'annuler au moins une fois.
2. Supposons que z est non-nulle et s'annule au moins une fois. Soit a tel que $z(a) = 0$. Alors $z'(a) \neq 0$ puisque la seule solution de l'équation valant $z(a) = 0$ et $z'(a) = 0$ est la solution nulle. Supposons qu'il existe un autre point c où z s'annule. On peut supposer $c > a$ et on pose $b = \inf\{x > a;\ z(x) = 0\}$. On sait que $b > a$ car $z'(a) \neq 0$ et donc a est un zéro isolé de z. Quitte à changer z en $-z$, on peut supposer que z est strictement positif sur $]a, b[$. Ceci entraine que $z'(a) \geq 0$ et $z'(b) \leq 0$. Mais alors, $z'' = pz$ est strictement positif sur $]a, b[$ et donc z' est strictement croissante. Ceci contredit que $z'(a) \geq 0$ et $z'(b) \leq 0$.

10.3 Autres Equations différentielles

Numéro 1
$(\sqrt{1+x^2}).y' - y = x + \sqrt{1+x^2}$

Considérons l'équation sans second membre associé : il s'agit d'une ED linéaire du premier ordre à coefficients varaibles (méthode *2bis*). On peut se ramener à la méthode *2* sans problème puisque $\sqrt{1+x^2}$ ne s'annule pas. Soit donc : $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.y$ (*) dont la solution générale est :

$$y = \lambda.exp(\int_0^x \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{1+t^2}}) = \lambda.exp(Argsh(x)) = \lambda.(x + \sqrt{1+x^2})$$

La méthode *12* est parfaite pour trouver la solution de l'équation avec second membre, en effet on cherche donc une solution particulière de (*) sous la forme :

$$f(x) = \lambda(x).(x + \sqrt{1+x^2})$$

qui conduiit à

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \implies \lambda(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Finalement, la solution générale est :

$$y(x) = (x + \sqrt{1+x^2}).(ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \lambda)$$

Numéro 2
$x^2.y'' - 2y = 0$; existe-t'il des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier ? (indication : utiliser le changement de variable t=ln(x))

On est dans la méthode *3bis* : il faudra se placer sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ séparément.

— Posons comme indiqué pour $x > 0$ $t = ln(x)$, et $y(x) = z(ln(x)) = z(t)$. Par dérivation, on a :

$$y'(x) = \frac{z'(ln(x))}{x} \text{ et } y''(x) = \frac{z''(ln(x)) - z'(ln(x))}{x^2}$$

En substituant, on obtient une équation équivalente à (E) sur $\mathbb{R}^+$:

$$z'' - z' - 2z = 0 \ (*)$$

qui relève de la méthode *1.* L'équation caractéristique a pour racines (-1) et 2 ; la solution générale de (*) est :

$$z(t) = Ae^{-t} + Be^{2t}$$

Donc pour l'équation initiale :

$$y(x) = \frac{A}{x} + Bx^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

— En posant $t = ln(-x)$ pour $x < 0$, on arrive aux mêmes solutions sur $\mathbb{R}^-$.

En définitive, la solution générale de l'ED initiale est :

$$\begin{cases} y(x) = \frac{A}{x} + Bx^2 & \text{pour } x > 0 \\ y(x) = \frac{C}{x} + Dx^2 & \text{pour} x < 0 \end{cases}$$

Il faut bien faire attention à prendre des coefficients différents sinon on n'obtient pas toutes les solutions.

Cherchons une solution de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. La continuité en 0 donne A=C=0. La dérivée seconde étant égale soit à 2B ($x > 0$), soit à 2D, on obtient B=D.

Finalement, les solution sur $\mathbb{R}$ de cette ED sont les fonctions $y = \lambda x^2$ (et forment donc un ev de dimension 1, et non 2=ordre de l'ED). C'est un cas particulier d'équation d'Euler.

Numéro 3
$x^2 + xy + y^2 - x^2y' = 0$

Comme ce n'est manifestement pas une ED linéaire et que celle-ci est homogène, on utilise la méthode *5.* On pose $t = \frac{y}{x}$. L'ED s'écrit alors :

$$1 + t + t^2 = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(tx)}{dx} = \frac{tdx + xdt}{dx}$$

Ce qui donne après regroupements :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t^2}$$

On obtient donc le paramétrage suivant pour les courbes intégrales :

$$\begin{cases} x(t) & = \lambda.e^{Arctan(t)} \\ y(t) & = \lambda.te^{Arctan(t)} \end{cases}$$

Numéro 4
$xy' - y + (\frac{y}{x})^3 = 0$

Sur $\mathbb{R}^*$ on a affaire à une équation de Bernoulli avec $p = 3$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (confer la méthode) on peut diviser par y^3. On pose alors conformément à la méthode *8* : $z = \frac{1}{y^2}$. z vérifie alors une EDL :

$$z' + 2\frac{z}{x} = \frac{2}{x^4}$$

On résoud d'abord l'équation homogène pour obtenir $z = \frac{\lambda}{x^2}$. On fait ensuite varier la constante (méthode *12*) : $\lambda'(x) = \frac{2}{x^2}$ d'où $\lambda(x) = \frac{-2}{x} + \lambda$. Finalement : $\exists\lambda, \forall x \neq 0, z(x) = \frac{\lambda x - 2}{x^3}$. Il reste à prendre la racine pour remonter à y ; on peut utiliser la remarque faite dans les méthodes : y est solution si et seulement si (-y) l'est.

Les solutions sont donc : $y = \sqrt{\frac{x^3}{\lambda x - 2}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^3}{\lambda x - 2}}$ avec pour intervalles de définition : $]2/\lambda, 0[$ pour $\lambda < 0$; $]-\infty, 0[$ pour $\lambda = 0$; $]-\infty, 0[\cup]2/\lambda, +\infty[$ pour $\lambda > 0$.

Numéro 5
$(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$

On est devant une équation que relève de la méthode *2bis*. Le coefficient de y' s'annulant, on se place successivement sur l'un des trois intervalles : $I =]-\infty, -1[$, $J =]-1, 1[$, $K =]1, +\infty[$ sur lesquels le facteur est de signe constant.

L'EDH associée $\frac{y'}{y} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$ admet sur I (respectivement J et K) pour solutions : $y = \frac{\lambda}{1-x^2}$ (la constant n'étant pas la même sur chacun des intervalles.)

La méthode de la variation des constantes conduit facilement à : $\lambda'(x) = x^2$. Ce qui donne les solutions de l'équation initiale :

$$y(x) = (\frac{x^3}{3} + \lambda_i)(\frac{1}{1 - x^2}) \text{ avec } i \in \{1, 2, 3\}$$

A signaler qu'aucune des solutions ne peut être prolongée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Numéro 6
$xy' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

La présence des groupements $xy' - y = \frac{xdy - ydx}{dx}$ et $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ invite fortement à passer aux polaires. Faisons-le !

Conformement aux rappels de la méthode *6*, l'équation se transforme en :

$$\rho^2 d\theta + \rho dx = 0$$

Supposons que ρ ne s'annule jamais ; il vient en explicitant x :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{sin(\theta) - 1}{cos(\theta}.d\theta = -\frac{cos(\theta)}{sin(\theta) + 1}.d\theta$$

C'est une équation du type de la méthode *4* à variables séparées, qu'on intègre en :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + sin(\theta)}$$

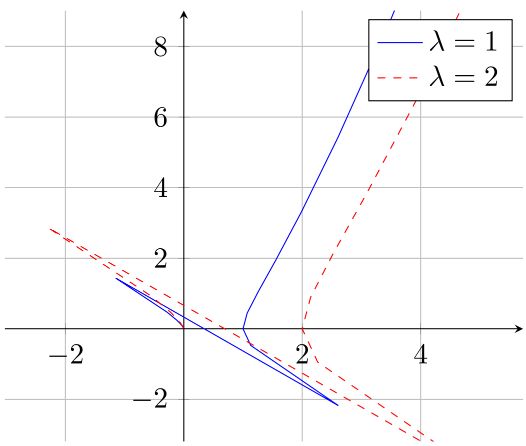
Numéro 7
$xy' - y - x - \frac{x^2}{y} = 0$

Il s'agit d'une équation homogène (méthode *5*). On pose donc $y = tx$ qui transforme l'ED en : $t + 1 + \frac{1}{t} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{xdt + tdx}{dx}$. On regroupe les termes en dx et en dt pour obtenir l'équation à variables séparées :

$$\frac{tdt}{1+t} = \frac{dx}{x}$$

Finalement les solutions sont données par les courbes paramétrées :

$$\begin{cases} x(t) & = \lambda.\frac{e^t}{t+1} \\ y(t) & = \lambda.\frac{te^t}{t+1} \end{cases}$$



Numéro 8

$4xy'' + 2y' - y = 0$: Trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}^+$ (Indication : on pourra chercher une solution particulière u telle que 1/u soit aussi solution.)

Soit u la solution particulière dont il est question et v son inverse. On a :

$$v' = -\frac{u'}{u^2} \text{ et } v'' = -\frac{u^2.u'' - 2uu'^2}{u^4}$$

En reportant ces expressions dans l'ED, compte tenu du fait que u est solution, il vient :

$$-2u^3 + 8xuu'^2 = 0$$

Par ailleurs **u ne s'annule pas** (puisqu'on parle de son inverse) donc ceci équivaut à :

$$u'^2 = (\frac{u}{2\sqrt{x}})^2 \ (*)$$

Or u ne s'annule pas et est continue : elle est donc de signe constant (par application du théorème des valeurs intermédiaires). De même u' ne peut pas s'annuler (sinon u s'annulerait en même temps d'après l'ED) donc u' est de signe constant aussi.

Donc l'équation (*) est équivalente à :

$$\frac{u'}{u} = \epsilon.\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ où } \epsilon \in \{-1, 1\}$$

Ceci donne comme solutions $y = \lambda.e^{\epsilon\sqrt{x}}$; les solutions particulières inverses l'une de l'autre sont :

$$u = e^{\sqrt{x}} \text{ et } v = e^{-\sqrt{x}}$$

Revenons à la résolution de l'ED pour $x > 0$, qui relève de la méthode *3* : on sait alors que l'ensemble des solutions constitue un espace vectoriel de dimension 2 ; or on en connait deux fonctions indépendantes (facile à voir), donc une base.

Finalement, les solutions pour $x > 0$ sont **exactement** les fonctions de la forme :

$$y = A.e^{\sqrt{x}} + B.e^{-\sqrt{x}}$$

Numéro 9

$y' + y^2 + xy + 1 = 0$ (résoudre autant que possible)

On peut identifier l'ED à du Ricatti.

Il faut donc déjà commencer par trouver une solution particulière. Vu que tout est polynômial, on peut essayer de chercher une solution particulière développable en série entière (méthode *13*)... Ou bien on intuite que $y = -x$ est une solution particulière !

Du coup, on pose, en vertu de la méthode : $z = y + x$, et normalement, on doit trouver du Bernoulli. Calculs faits, il vient :

$$z' = xz - z^2$$

Comme $p = 2$, on pose conformément à la méthode relative à Bernoulli : $u = \frac{1}{z}$ non sans avoir justifié (confer méthode *9*). u vérifie alors une EDL avec second membre :

$$u' + x.u = 0 \implies u = exp(-\frac{x^2}{2}).(\lambda + \int_0^x exp(-\frac{t^2}{2}\mathrm{dt})$$

et **on ne peut pas aller plus loin** car la dernière primitive ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles... Il n'y a donc plus qu'à remplacer pour trouver l'expression de y.

Numéro 10

Soit $\lambda > 0$ et l'équation différentielle : $xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$

1. Déterminer la solution définie pour $x > 0$ ayant une limite finie en zéro.
2. Déterminer les solutions DSE au voisinage de zéro. Comparer avec le 1.

---

1. Comme on se place sur $\mathbb{R}^+$, le coefficient devant y' ne s'annule pas et on sait faire : équation homogène et variations des constantes. Allons-y ! L'EDH associée est $\frac{y'}{y} = -\frac{\lambda}{x}$ dont la solution générale est $y = \frac{A}{x^\lambda}$. La variation de la constante donne : $A'(x) = \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}$ donc : $A(x) = A + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{dt}$. (Cette dernière intégrale étant convergente à la borne zéro puisque $\lambda > 0$)

Finalement, la solution générale est : $y = \frac{A}{x^\lambda} + \frac{1}{x^\lambda}.\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{dt}$.

Le second terme a une limite en zéro en vertu de l'intégration des relations de comparaison de fonctions positives.

$$\frac{t^{\lambda-1}}{1+t} \underset{0}{\approx} t^{\lambda-1} \text{ donc } \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{dt} \underset{0}{\approx} \int_0^x t^{\lambda-1}\mathrm{dt} = \frac{x\lambda}{\lambda}$$

Le second terme tend vers $\frac{1}{\lambda}$, et le premier a une limite finie si et seulement si A=0.

Le fonction recherchée est donc : $y = \frac{1}{x^\lambda}.\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{dt}$.

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$ dont la somme est solution de l'ED sur $]-R, R[$. La dérivabilité terme à terme et l'unicité du DSE conduisent à :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+\lambda}$$

Cette série entière a pour rayon 1 d'après le critère de d'Alembert, et sa somme est évidemment solution de notre ED.

Le lien est facile à faire avec la question précédente puisqu'en intégrant terme à terme le DSE de $\frac{t^{\lambda-1}}{1+t} = \sum_n (-1)^n t^{n+\lambda-1}$ (ce qui est licite si $|x| < 1$) on retrouve la fonction précédemment déterminée.

10.4 Systèmes Différentiels

Le plus facile des systèmes différentiels

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

D'abord, l'équation $z'' = 0$ donne facilement $z(t) = at + b$, avec a et b des constantes. Ensuite, on a

$$u' = x'' + iy'' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u.$$

On en déduit que $u(t) = (c + id)e^{-i\omega t}$. En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve que

$$\begin{aligned} x'(t) &= c\cos(\omega t) + d\sin(\omega t) \\ y'(t) &= d\cos(\omega t) - c\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Il suffit d'intégrer une nouvelle fois pour trouver les valeurs de x et de y :

$$\begin{aligned} x(t) &= c'\sin(\omega t) - d'\cos(\omega t) \\ y(t) &= d'\sin(\omega t) + c'\cos(\omega t) \end{aligned}$$

où on a posé $c' = c/\omega$ et $d' = d/\omega$. Il s'agit d'un mouvement hélicoïdal.

Diagonalisable !
Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+2y-z \\ y' & = & 2x+4y-2z \\ z' & = & -x-2y+z \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y+z \\ y' & = & -x+2y+z \\ z' & = & x+z \end{array}\right.$$

---

1. Introduisons la matrice
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique de A est $X^2(X-6)$. 0 est valeur propre double, mais A est de rang 1 et donc $\ker(A)$ est de dimension 2. Une base de $\ker(A)$ est donnée par les vecteurs $u_1 = (1,0,1)$ et $u_2 = (2,-1,0)$. D'autre part, une base de $\ker(A-6I)$ est donné par $u_3 = (1,2,-1)$. Les solutions sont donc données par les triplets s'écrivant
$$X(t) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma e^{6t} u_3.$$

2. Introduisons cette fois la matrice
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
Son polynôme caractéristique est $X(X-1)(X-2)$, de sorte que ses valeurs propres sont $0,1,2$, de vecteurs propres respectifs associés $u_0 = (1,1,-1)$, $u_1 = (0,-1,1)$, et $u_2 = (1,1,1)$. Ainsi, les solutions sont données par les triplets
$$X(t) = \lambda u_0 + \mu e^t u_1 + \gamma e^{2t} u_2.$$

Diagonalisable...mais sur les complexes
Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ lorsque

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

---

1. Les valeurs propres (complexes) de A sont 2, $1+i$ et $1-i$. Un vecteur propre associé à 2 est donné par $(1,1,1)$. Pour les deux autres valeurs propres, et pour trouver les solutions réelles, on va appliquer la méthode des coefficients indéterminés. On cherche donc une solution $X(t)$ s'écrivant

$$X(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t \cos t + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} e^t \sin t$$

et on cherche les relations sur les coefficients $a,\dots,f$ pour que $X(t)$ soit solution du système. La relation $X'(t) = AX(t)$ donne le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a+b)e^t\cos t + (d+e)e^t \sin t &=& (a+d)e^t\cos t + (-a+d)e^t\sin t \\ (-a+2b+c)e^t\cos t + (-d+2e+f)e^t\sin t &=& (b+e)e^t\cos t + (-b+e)e^t\sin t \\ (a+c)e^t\cos t + (d+f)e^t\sin t &=& (c+f)e^t\cos t + (-c+f)e^t\sin t \end{array} \right.$$

Par identification, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b &=& d \\ e &=& -a \\ b &=& -c \\ e &=& -f \\ a &=& f \\ d &=& -c \end{array} \right.$$

Les deux dernières équations sont inutiles car elles se déduisent des précédentes. On peut alors choisir a et b comme paramètre, et on obtient un espace vectoriel de dimension deux de solutions, décrit par

$$\lambda e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + \mu e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

En conclusion, un triplet $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ est solution du système ssi il existe trois constantes α, λ et μ telles que

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha e^{2t} + \lambda e^t \cos t + \mu e^t \sin t \\ x_2(t) = \alpha e^{2t} - \lambda e^t \sin t + \mu e^t \cos t \\ x_3(t) = \alpha e^{2t} + \lambda e^t \sin t - \mu e^t \cos t \end{cases}$$

2. Les valeurs propres de la matrice sont 1, i et $-i$. Un vecteur propre associé à 1 est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Un vecteur propre associé à i est $V_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bien entendu, la matrice étant réelle, un vecteur propre associé à $-i$ est $\overline{V_i}$. Pour obtenir des solutions réelles, on peut considérer (toujours parce que la matrice A est réelle) $\Re e(V_i e^{it})$ et $\Im m(V_i e^{it})$. On trouve alors les solutions (indépendantes)

$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système dans $\mathbb{R}$ est donc

$$\begin{pmatrix} \lambda e^t - \mu \sin t + \nu \cos t \\ -3\lambda e^t + \mu \cos t + \nu \sin t \\ -4\lambda e^t + 2\mu \cos t + 2\nu \sin t \end{pmatrix}.$$

Systèmes non diagonalisables

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ lorsque

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

---

1. On calcule le polynôme caractéristique de A qui est $(X-2)^2(X-1)$. On cherche ensuite un vecteur propre pour la valeur propre 1. On trouve $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La fonction $t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une solution. Malheureusement, si on calcule $A - 2I$, on obtient que la matrice est de

rang 2, et donc le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 1 : la matrice n'est pas diagonalisable !
On applique alors la méthode des coefficients indéterminés pour obtenir l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions associé à cette valeur propre. Autrement dit, on cherche les conditions sur a, b, c, d, e, f pour que la fonction

$$X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix}$$

soit solution de $X'(t) = AX(t)$. Ceci est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2at+(a+2b) \\ 2ct+(c+2d) \\ 2et+(e+2f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(c+e)t+2(d+f) \\ (-a+2c+2e)t+(-b+2d+2f) \\ (-a+c+3e)t+(-b+d+3f) \end{pmatrix}$$

On identifie d'abord les termes de degré 1. On trouve le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & c+e \\ 2c & = & -a+2c+2e \\ 2e & = & -a+c+3e \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-c-e & = & 0 \\ a-2e & = & 0 \\ a-c-e & = & 0 \end{array}\right.$$

La première et la troisième ligne sont identiques. On trouve donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2e \\ c & = & e \\ e & = & e \end{array}\right.$$

On identifie ensuite les termes constants. On trouve :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & 2(d+f) \\ c+2d & = & -b+2d+2f \\ e+2f & = & -b+d+3f \end{array}\right.$$

On remplace a et c par leur valeur en fonction de e (qui est un paramètre), puis on simplifie. Deux équations sont identiques et on trouve que le système précédent est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -b+2c+2f & = & e \\ -b+2f & = & e \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 2d-e \\ d & = & d \\ f & = & d \end{array}\right.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation est

$$\lambda e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 2et+2d-e \\ et+d \\ et+d \end{pmatrix},$$

λ, d et e étant des paramètres réels.

2. Le polynôme caractéristique de A est $X(X-1)^2$. On peut vérifier que $A(A-I) \neq 0$, et donc que le polynôme minimal de A est $X(X-1)^2$. La matrice A n'est pas diagonalisable. On recherche ensuite la valeur propre 0. Un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une solution. On étudie ensuite la valeur propre 2 en appliquant la méthode des coefficients indéterminés. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} e^t$ et on étudie à quelle condition $X'(t) = AX(t)$, c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} at + (a+b) & = & (-6a+5c+3e)t + (-6b+5d+3f) \\ ct + (c+d) & = & (-8a+7c+4e)t + (-8b+7d+4f) \\ et + (e+f) & = & (-2a+c+e)t + (-2b+d+f) \end{array} \right.$$

On peut alors résoudre ce système (en fait, exprimer tous les paramètres en fonction de 2). On peut aussi utiliser la méthode suivante. On cherche une solution sous la forme

$$X(t) = e^t(tV_2 + V_1).$$

On a $X'(t) = AX(t)$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} AV_2 & = & V_2 \\ AV_1 & = & V_1 + V_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} V_2 & = & (A-I)V_1 \\ (A-I)^2 V_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

On cherche alors l'expression d'un élément V_1 de $\ker(A-I)^2$. Il est facile de vérifier que le noyau de $(A-I)^2$ est le plan d'équation $3X - 2Y - Z = 0$, dont une base est constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. V_1 s'écrit donc

$$V_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

avec λ, μ des réels. On en déduit

$$V_2 = (A-I)V_1 = (\lambda + 2\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, les solutions s'écrivent donc

$$\nu\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+e^t\begin{pmatrix}\lambda+\mu\\\lambda\\\lambda+3\mu\end{pmatrix}+(\lambda+2\mu)te^t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Avec l'exponentielle de matrice
Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix}2&0&1\\1&-1&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire la valeur de $\exp(tA)$.
3. Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl}x_1'(t)&=&2x_1(t)+x_3(t)\\x_2'(t)&=&x_1(t)-x_2(t)-x_3(t)\\x_3'(t)&=&-x_1(t)+2x_2(t)+2x_3(t)\end{array}\right.$$

---

1. Un calcul sans difficultés montre que $\chi_A(X)=(X-1)^3$.
2. Posons $N=A-I_3$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $N^3=0$, et donc N est nilpotent d'indice 3. Ceci facilite grandement le calcul de l'exponentielle de N. En effet, on a

$$\exp(tN)=\sum_{n=0}^{+\infty}t^nN^n=I_3+tN+\frac{t^2}{2}N^2.$$

D'autre part, puisque $tA=tI_3+tN$ et que tI_3 et tN commutent, on a

$$\exp(tA)=\exp(tI_3)\exp(tN)=e^t\left(I_3+tN+\frac{t^2}{2}N^2\right).$$

On en déduit

$$\exp(tA)=e^t\begin{pmatrix}t+1&t^2&t^2+t\\t&t^2-2t+1&t^2-t\\-t&-t^2+2t&-t^2+2t+1\end{pmatrix}.$$

3. Soit $X(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$. Alors $X(t)=\exp(tA)X(0)$. En notant $X(0)=(a,b,c)$, on trouve

$$\begin{array}{lcl}x_1(t)&=&a(t+1)e^t+bt^2e^t+c(t^2+t)e^t\\x_2(t)&=&ate^t+b(t^2-2t+1)e^t+c(t^2-t)e^t\\x_3(t)&=&-ate^t+b(-t^2+2t)e^t+c(-t^2+2t+1)e^t.\end{array}$$

Avec l'exponentielle (bis)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$. En déduire la solution générale du sytème $X' = AX$.

Introduisons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de remarquer que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^n = 0$ pour $n \geq 3$. De plus, $A = (aI_3 + bB + cB^2)$. Puisque I_3, B et B^2 commutent, on a

$$\exp(A) = \exp(a)\exp(bB)\exp(cB^2).$$

Or, utilisant que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$, on trouve

$$\begin{aligned} \exp(bB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bB)^n}{n!} \\ &= I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \exp(cB^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cB^2)^n}{n!} \\ &= I_3 + cB^2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \exp(A) &= e^a \left(I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}\right)\left(I_3 + cB^2\right) \\ &= e^a \left(I_3 + bB + \left(\frac{b^2}{2} + c\right) B^2\right) \end{aligned}$$

soit

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & be^a & \left(\frac{b^2}{2}+c\right)e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

La solution générale de $X' = AX$ est alors donnée par $X(t) = \exp(tA)X(0)$, soit, en posant $X(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$X(t) = \alpha e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{at}\begin{pmatrix} bt \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{at}\begin{pmatrix} ct + \frac{b^2t^2}{2} \\ bt \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec second membre

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1.
$$\begin{cases} x_1'(t) &= 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t}. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + t \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) - 3x_2(t). \end{cases}$$

On donnera les solutions réelles.

---

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont 2 et 3, avec vecteurs propres respectifs $(-3,4)$ et $(4,-4)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t) = PY(t)$. Le système se réécrit alors en

$$PY(t) = APY(t) + B(t) \iff Y(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t),$$

où $B(t) = \binom{-3t+4e^{3t}}{4t-4e^{3t}}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) &= 3y_2(t) + e^{3t}. \end{cases}$$

Il est désormais facile de résoudre séparément chacune des équations différentielles séparément, en cherchant notamment une solution particulière sous la forme d'une exponentielle-polynôme. On trouve alors que

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & \lambda e^{2t} - \frac{1}{4} \\ y_2(t) & = & \mu e^{3t} + te^{3t} \end{array}\right.$$

Revenant à $X(t)$, on trouve que les solutions du système différentiel initial sont les fonctions

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & -3\lambda e^{2t} + 4\mu e^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} \\ x_2(t) & = & 4\lambda e^{2t} - 4\mu e^{3t} - 2t - 1 - 4te^{3t}. \end{array}\right.$$

2. La méthode est similaire, mais cette fois la matrice n'est diagonalisable que sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On pose donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont $-1+2i$ et $-1-2i$, avec vecteurs propres respectifs $(1-i, 2i)$ et $(1+i, -2i)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & -2i \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -2i & -1-i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Soit $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t) = PY(t)$. Le système se réécrit alors en

$$PY(t) = APY(t) + B(t) \iff Y(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t),$$

où $B(t) = \binom{t}{0}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & (-1+2i)y_1(t) + t/2 \\ y_2'(t) & = & (-1-2i)y_2(t) + t/2. \end{array}\right.$$

Ses solutions (complexes) sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & c_1 e^{(-1+2i)t} + \frac{t}{10} + \frac{3}{50} + \frac{it}{5} - \frac{2i}{25} \\ y_2(t) & = & c_1 e^{(-1-2i)t} + \frac{t}{10} + \frac{3}{50} - \frac{it}{5} + \frac{2i}{25} \end{array}\right.$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Si on revient à x_1 et x_2, et en remplaçant $e^{(-1+2i)t}$ par $e^{-t}(\cos(2t) + i\sin(2t))$, on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & \big((c_1+c_2) - i(c_1-c_2)\big)e^{-t}\cos(2t) + \big(i(c_1-c_2) + (c_1+c_2)\big)e^{-t}\sin(2t) + \frac{3t}{5} - \\ x_2(t) & = & 2i(c_1-c_2)e^{-t}\cos(2t) - 2(c_1+c_2)e^{-t}\sin(2t) - \frac{4t}{5} + \frac{8}{25}. \end{array}\right.$$

On pose $\lambda = c_1 + c_2$ et $\mu = i(c_1 - c_2)$. Le couple (λ, μ) parcourt $\mathbb{C}^2$ lorsque (c_1, c_2) parcourt $\mathbb{C}^2$, et les solutions complexes du système sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & (\lambda-\mu)e^{-t}\cos(2t) + (\lambda+\mu)e^{-t}\sin(2t) + \frac{3t}{5} - \frac{1}{25} \\ x_2(t) & = & 2\mu e^{-t}\cos(2t) - 2\lambda e^{-t}\sin(2t) - \frac{4t}{5} + \frac{8}{25}. \end{array}\right.$$

Pour obtenir les solutions réelles, il suffit de prendre λ, μ dans $\mathbb{R}$.

Coefficients non constant

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' &= (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' &= 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2. \end{cases}$$

Posons

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

On doit résoudre le système $X'(t) = A(t)X(t)$. On va procéder comme pour une matrice à coefficients constants, en diagonalisant pour chaque t la matrice $A(t)$. Son polynôme caractéristique est $\chi_{A(t)}(X) = X^2 - (t+1)X + t$, dont les racines sont t et 1. Le miracle est que les vecteurs propres ne dépendent pas de t. En effet, si on pose $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (1,2)$, alors $A(t)u_1 = u_1$ tandis que $A(t)u_2 = tu_2$. Autrement dit, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

on a $A(t) = P(t)DP(t)^{-1}$. On peut donc résoudre le système exactement comme s'il était à coefficients constants. Plus précisément, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, alors Y est solution de $Y'(t) = D(t)Y(t)$, soit

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2. \end{cases}$$

Il vient $y_1(t) = Ce^t$, et $y_2(t) = De^{t^2/2}$, avec $C, D \in \mathbb{R}$. On revient à X par la relation $Y = PX$, et on trouve que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) &= Ce^t + De^{t^2/2} \\ x_2(t) &= Ce^t + 2De^{t^2/2}, \end{cases}$$

avec $C, D \in \mathbb{R}^2$.

Avec second membre, et pas à coefficients constants

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2tx - y + t\cos t \\ y' &= x + 2ty + t\sin t. \end{cases}$$

On pourra, dans le système homogène, effectuer le changement de fonctions inconnues en posant $u = xe^{-t^2}$ et $v = ye^{-t^2}$.

On considère le système homogène, et on obtient avec le changement de variables associé

$$u'(t) = \big(- 2tx(t) + x'(t) \big) e^{-t^2} = -v(t)$$

et

$$v'(t) = \big(- 2ty(t) + y'(t) \big) e^{-t^2} = u(t).$$

Le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & -v(t) \\ v'(t) & = & u(t) \end{array} \right.$$

possède comme système fondamental de solutions les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Revenant au système initial, on trouve un système fondamental de solutions de l'équation homogène donné par les deux vecteurs

$$h_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)e^{t^2} \\ \sin(t)e^{t^2} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\sin(t)e^{t^2} \\ \cos(t)e^{t^2} \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution de l'équation avec second membre par la méthode de variation des constantes. On pose donc $f(t) = \lambda(t)h_1(t) + \mu(t)h_2(t)$, et on trouve que

$$\lambda'(t)h_1(t) + \mu'(t)h_2(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\lambda_1'(t) = t^e - t^2$ et $\lambda_2'(t) = 0$. Une solution particulière est donc obtenue par $\lambda_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $\lambda_2(t) = 0$. La solution générale de l'équation est donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \lambda \cos(t)e^{t^2} - \mu \sin(t)e^{t^2} - \frac{1}{2}\cos(t) \\ y(t) & = & \lambda \sin(t)e^{t^2} + \mu \cos(t)e^{t^2} - \frac{1}{2}\sin(t) \end{array} \right.$$

Ordre plus grand
Résoudre le système différentiel d'ordre 2 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x''(t) & = & x'(t) + y'(t) - y(t) \\ y''(t) & = & x'(t) + y'(t) - x(t) \end{array} \right.$$

Donnons deux méthodes. La première est de transformer le système en système d'ordre 1, mais de taille 4 (comme on change une équation linéaire d'ordre 2 en un système d'ordre 1). Pour cela, on pose

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ x'\\ y'\end{pmatrix}.$$

Alors, on a $X'=AX$ avec

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&-1&1&1\\ -1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de résoudre le système comme un système classique.
Une autre méthode, plus astucieuse, est de regarder un peu le système et d'observer la symétrie entre $x(t)$ et $y(t)$. Ceci incite à poser $u=x+y$ et $v=x-y$. Alors u et v sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{rcl} u''(t)-2u'(t)+u(t)&=&0\\ v''(t)-v(t)&=&0\end{array}\right.$$

On résoud ces équations, et on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t)&=&(\lambda t+\mu)e^t\\ v(t)&=&\alpha e^t+\beta e^{-t}\end{array}\right.$$

On retrouve alors facilement x et y.

Comportement à l'infini des systèmes 2x2

Soit $A=\begin{pmatrix} a&b\\ c&d\end{pmatrix}$ une matrice complexe. Montrer que toutes les solutions du système $X'(t)=AX(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

On peut réduire la matrice A sur $\mathbb{C}$. Il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est égale à l'une des deux matrices suivantes :

$$T=\begin{pmatrix} \lambda&0\\ 0&\mu\end{pmatrix}\text{ ou }T=\begin{pmatrix} \lambda&1\\ 0&\lambda\end{pmatrix}.$$

Posant $Y(t)=P^{-1}X(t)$, le système est équivalent à

$$PY'(t)=APY(t)\iff Y'(t)=TY(t).$$

Toutes les normes sur $\mathbb{C}^2$ étant équivalentes, il suffit de vérifier que les lignes de $Y(t)$ sont toujours bornées.

— Dans le premier cas (A diagonalisable), les solutions sont les fonctions de la forme
$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda t} \text{ et } y_2(t) = C_2 e^{\mu t}.$$
Ces deux fonctions tendent toujours vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\Re e(\lambda) < 0$ et $\Re e(\mu) < 0$.

— Dans le second cas (A trigonalisable), les solutions sont de la forme
$$y_1(t) = e^{\lambda t}(C_1 + tC_2) \text{ et } y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}.$$
Par comparaison des fonctions exponentielles et des polynômes, ceci tend toujours vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\Re e(\lambda) < 0$.

Chapitre 11

Calcul Différentiel – Fonctions de plusieurs variables

Deuxième partie

Algèbre

Chapitre 12

Arithmétique & Plynômes

Chapitre 13

Algèbre Générale

13.1 Structures algébriques élémentaires

Un **monoïde** est une structure algébrique consistant en un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre pour cette loi de composition.

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition *. On dit que (G,*) est un **groupe** si :

— la loi * est associative et possède un élément neutre e

— tout élément de G possède un inverse (au sens de la loi de composition interne *)

Dans un groupe, tout élément est simplifiable :

$$\forall (x,y,z) \in G^3 \begin{cases} (x * y = x * z) & \Longrightarrow y = z \\ (y * x = z * x) & \Longrightarrow y = z \end{cases}$$

Soit (G,*) un groupe et soit H une partie non vide de G. On dit que H est un **sous-groupe** de (G,*) si :

— l'ensemble H est stable pour la loi * : $\forall (x,y) \in H^2, x * y \in H$

— l'ensemble H est stable par passage à l'inverse : $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Soit (G,*) un groupe et soit H une partie non vide de G. H est un *sous-groupe* de (G,*) si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$$

Une intersection quelconque de sous-groupes de G est encore un sous-groupe de G.

Les sous-groupes de ($\mathbb{Z}$,+) sont les $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. (*Rappel :* si n est un élément de $\mathbb{N}$, on note $n\mathbb{Z} = \{kn, k \in \mathbb{Z}\}$)

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition, notées + et x. On dit que (A,+,x) est un **anneau** si :

— (A,+) est un groupe commutatif
— La loi x est associative et distributive par rapport à la loi +
— Il existe un élément neutre pour le produit x

Une partie B d'un anneau (A,+,x) est appelée **sous-anneau** de A lorsque :

— B est un sous-groupe de A pour +
— B est stable pour x
— Le neutre pour la loi x de A appartient à B

Un sous-anneau d'un sous-anneau d'un anneau A est un sous-anneau de A.

L'intersection de deux sous-anneau d'un même anneau est un sous-anneau.

Soit (A,+,x) un anneau. l'ensemble des éléments de A qui sont inversibles pour le produit est un groupe pour la loi x.

Un **morphisme de groupes** (ou *homomorphisme de groupes*) est un application entre deux groupes qui respecte la structure des groupes. Plus précisément, si (G,*) et (G',†) sont deux groupes de neutres respectifs e et e', une application $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe lorsque :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \dagger f(y)$$

Par conséquent, on a les deux proprités suivantes :

$$f(e) = e' \text{ et } \forall x \in G, f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$$

Un **morphisme d'anneaux** est une application f entre deux anneaux (A,+,x) et (B,†,*) qui vérifie les trois propriétés suivantes : $\forall (a, b) \in A$

— $f(a + b) = f(a) \dagger f(b)$
— $f(a \text{ x } b) = f(a) * f(b)$
— $f(1_A) = 1_B$: f envoie le neutre multiplicatif de A sur le neutre multiplicatif de B

L'image directe d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux est un sous-anneau de l'anneau d'arrivée.

L'image réciproque d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux est un sous-anneau de l'anneau de départ.

Soit K un ensemble muni de deux lois + et x. On dit que (K,+,x) est un **corps** si (K,+,x) est un anneau commutatif non réduit à 0, et si tous les éléments non nuls de K sont inversibles pour la loi produit.

13.2 Groupes $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation $\equiv [n]$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

Pour tout n de $\mathbb{R}^*$ on note $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ au lieu de $\mathbb{Z}/_{\equiv[n]}$. On note $\hat{x}$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$:

$$\hat{x} = \{y \in \mathbb{Z}, x \equiv y[n]\} = \{x + \lambda n, \lambda \in \mathbb{Z}\} = \{x\} + n\mathbb{Z}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

— $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},+)$ est un groupe commutatif

— L'application $p_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ est morphisme surjectif de groupes, appelé **surjection canonique**

Deux remarques :

1. $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ est engendré par $\hat{1}$
2. $Ker(p_n) = n\mathbb{Z}$ et $Im(p_n) = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

Les générateurs du groupe ($\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$,+) sont les $\hat{k}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $pgcd(k, n) = 1$.

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$; il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\xi = \hat{k}$. Puisque $\hat{1}$ est générateur de $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, on a :

$$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} =<\xi> \iff \hat{1} \in <\xi> \iff (\exists \zeta \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \hat{1} = \zeta\xi)$$

$$\iff (\exists u \in \mathbb{Z}, 1 = \hat{u}\hat{k}) \iff (\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, 1 - uk = vn)$$

$$\iff pgcd(k,n) = 1 \text{ , en utilisant le th de Bezout}$$

□

13.3 Groupes monogènes

Soient (G,.) un groupe, $a \in G$.

1. L'application $f_a : \mathbb{Z} \to G$ telle que $k \mapsto a^k$ est un morphisme du groupe ($\mathbb{Z}$,+) dans le groupe (G,.). Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Ker(f_a) = n\mathbb{Z}$ et $Im(f_a) =< a >$.
2. — Si $Ker(f_a) = \{0\}$, alors $\mathbb{Z} \to< a >$ telle que $k \mapsto a^k$ est un isomorphisme du groupe ($\mathbb{Z}$,+) sur le sous-groupe de G engendré par a.
   — Si $Ker(f_a) \neq \{0\}$, il existe $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $Ker(f_a) = n\mathbb{Z}$ et alors $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \to< a >$ telle que $\hat{k} \mapsto a^k$ est un isomorphisme du groupe ($\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$,+) sur le sous-groupe de G engendré par a.

Un groupe est dit **monogène** si et seulement s'il admet un générateur, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $a \in G$ tel que $G =< a >$. Un groupe G est dit **cyclique** si et seulement si G est monogène et fini.

13.4 Produits, Parties génératrices

Soient (G,+), (G',T) deux groupes. En munissant GxG' de la loi interne * définie par :

$$\forall (x, x') \in G\text{x}G', \forall (y, y') \in G\text{x}G', (x, x') * (y, y') = (x + y, x'Ty')$$

GxG' est un groupe pour * appelé **groupe produit de G et G'**.

Soient G un groupe et A appartenant à l'ensemble des parties de G. On dit que A est une partie **génératrice** de G si et seulement si :

$$G =< A >= \bigcap_{\substack{H \text{ ss-gp de } G \\ A \subset H}} H$$

13.5 Idéaux d'un anneau commutatif

Soient (A,+,.) un anneau commutatif, I appartient à l'ensemble des parties de A. On dit que I est un **idéal** de A si et seulement si :

— $I \neq \emptyset$

— $\forall (x, y) \in I^2, x + y \in I$

— $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I :=$ ceci est appelé l'absorbance

En remarquant que $x - y = x + (-1_A).y$, on constate que l'on peut réduire les deux premières conditions à l'assertion suivante : *I est un sous-groupe de A pour +*.

Soit A un anneau commutatif. Pour tout x de A, la partie xA=Ax $= \{ax, a \in A\}$ est un idéal de A appelé **idéal engendré par x**.

Soient A, A' deux anneaux commutatifs, $f : A \to A'$ un morphisme d'anneaux. Alors,

— Ker(f) est un idéal de A

— Im(f) est un sous-anneau de A'

Un anneau A est dit **intègre** si et seulement si :

1. A est commutatif
2. $\forall (x, y) \in A^2, (xy = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0))$
3. $A \neq \{0\}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

13.6 Exercices

Existence d'un idempotent

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative. Montrer qu'il existe $s \in E$ tel que $s^2 = s$.

Choisissons $a \in E$ quelconque. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \overset{\text{déf}}{=} a^{2^n}$. Puisque E est fini, cette suite ne saurait être injective : il existe donc deux éléments u_n et u_{n+p} égaux. Posons $b = a^{2^n}$. Alors $b^{2^p} = b$.

— Si $p = 1$ on a répondu à la question.

— Si $p > 1$, on remarque que si $x^m = x$ alors x^{m-1} est idempotent puisque $(x^{m-1})^2 = x^{2m-2} = x^m.x^{m-2} = x.x^{m-2} = x^{m-1}$. Alors $s = 2^{2^p-1}$ convient.

Propriété sur un groupe fini

Soit G un groupe fini d'ordre n. Montrer que, pour tout $x \in G$, on a $x^n = e$ (le neutre pour la loi de composition interne de G).

On note $H =< x >$, et on note r son ordre. Alors $r|n$, et il suffit de prouver que $x^r = e$. On peut supposer sans restreindre que $H = G$, ou alors on travaille dans H. On pose

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to H \\ q \mapsto x^q \end{array}$$

qui est *surjective* par construction de H. L'ensemble des $q \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) = e$ forme un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, c'est donc un certain $s\mathbb{Z}$ avec $s \in \mathbb{Z}$. De plus, $q' - q'' \in s\mathbb{Z} \iff f(q')f(q'')^{-1} = e$, ce qui montre que H a autant d'éléments qu'il y a de classes modulo s dans $\mathbb{Z}$, donc $Card(H) = s$ donc $s = r$ et $x^r = e$.

L'**ordre** d'un groupe est le cardinal de son ensemble sous-jacent. Le groupe est dit *fini* ou *infini* suivant que son ordre l'est ou pas.

Une propriété sur le nombre fini des sous-groupes

Si un groupe G n'a qu'un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.

On note G_x le groupe engendré par x. $G_x\{x^n, n \in \mathbb{Z}\}$. On a alors $G = \cup_{x \in G} G_x$, et c'est une réunion finie.

<u>LEMME</u> : G_x est fini.

Démonstration. En effet, si G_z infini, alors $G_z \simeq \mathbb{Z}$ et il contient tous les $n\mathbb{Z}$ comme sous-groupes, donc C_{z^n} est sous-groupe de C_z pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et ils sont différents. $\square$

Donc G est union d'un nombre fini de sous-groupes finis, donc G fini.

Sous groupe produit

Soient G,G' deux groupes, H (respectivement H') un sous-groupe de G (respectivement G'). Montrer que HxH' est un sous-groupe de GxG'.

Avec des notations évidentes :

- $(x, x') * (y, y') = (x + y, x'Ty') \in H\text{x}H'$
- $(e, e') \in H\text{x}H'$ est le neutre de GxG'
- $(x, x')^{-1} = (x^{-1}, x'^{-1}) \in H\text{x}H'$

Partie génératrice et commutativité

Soient G un groupe, A une partie génératrice de G. On suppose que les éléments de A commutent deux à deux. Montrer que G est commutatif.

On suppose $G =< A >$ et : $\forall (a, b) \in A^2, ab = ba$.

- Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $(a, b) \in A^2$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a^n b = ba^n$$

  La propriété est vraie pour $n = 0$ car $a^0 = 1$, neutre de G. Si $a^n b = ba^n$ alors :

$$a^{n+1}b = (aa^n)b = a(a^n b) = a(ba^n) = (ab)a^n = (ba)a^n = ba^{n+1}$$

- On a, pour tout $(a, b) \in A^2$:

$$\begin{aligned} ab = ba \quad &\Longrightarrow a^{-1}(ab)a^{-1} = a^{-1}(ba)a^{-1} \\ &\Longrightarrow ba^{-1} = a^{-1}b \end{aligned}$$

- Il résulte des deux points précédents que, pour tout $(a, b) \in A^2$, b commute avec tous les $a^n, n \in \mathbb{Z}$.
- En appliquant le résultat précédent à (b, a^n) à la place de (a,b), on déduit que, pour tout $(a, b) \in A^2$ et pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, a^n et b^p commutent.
- Soit $(x, y) \in G^2$. Puisque G est engendré par A, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*, a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q \in A, \alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q \in \mathbb{Z}$ tels que : $x = a_1^{\alpha_1}...a_p^{\alpha_p}$ et $y = b_1^{\beta_1}...b_q^{\beta_q}$. Comme $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q$ commutent deux à deux, $a_1^{\alpha_1}, ..., a_p^{\alpha_p}, b_1^{\beta_1}, ..., b_q^{\beta_q}$ commutent deux à deux, et donc en utilisant l'associativité, on déduit $xy = yx$.

On conclut : G est commutatif.

Sous-anneaux et idéaux d'un anneau commutatif

Soit A un anneau commutatif, B un sous-anneau de A et I un idéal de A. Montrer :

1. B+I est un sous-anneau de A
2. I est un idéal de B+I
3. B∩I est un idéal de B

---

1. — $B \subset A$ par définition de B.
   — Soient $x, y \in B + I$. Il existe $b \in B$ et $u \in I$ tels que $x = b + u$ et il existe $c \in B$ et $v \in I$ tels que $y = c + v$. On a alors :
   $$x - y = (b + u) - (c + v) = (b - c) + (u - v) \in B + I$$
   — Avec les mêmes notations :
   $$xy = (b + u)(c + v) = bc + (bv + uc + uv) \in B + I$$
   car $bc \in B$ et car $(bv + uc + uv) \in I$ par absorbance d'un idéal.
   — On a $1 \in B$ et $0 \in I$, donc $1 = 1 + 0 \in B + I$.

   On conclut : B+I est un sous-anneau de A.
2. — On a $I \subset B + I$, car pour tout $u \in I$: $u = 0 + u \in B + I$.
   — $I \neq \emptyset$ puisque I est un idéal de A.
   — Soient $u, v \in I$. Puisque I est un idéal de A : $u + v \in I$.
   — Soient $x \in B + I$ et $u \in I$. Comme $B + I \subset A$, on a $x \in A$, puis comme I est idéal de A, on obtient : $xu \in I$.

   On conclut : I est un idéal de B+I.
3. — On a $B \cap I \subset B$.
   — $B \cap I \neq \emptyset$ cat $0 \in B \cap I$.
   — Soient $u, v \in B \cap I$. Puisque $u, v \in B$ et que B est un sous-anneau de A, on a $u - v \in B$. Puisque I est un idéal de A et que $u, v \in I$, on a $u - v = u + (-v) \in I$. D'où, $u - v \in B \cap I$.
   — Soient $b \in B$, $u \in B \cap I$. Puisque $b \in B$, $u \in B$ et que B est un sous-anneau de A, on a $bu \in B$. Puisque $b \in B$ et $u \in I$ et que I est un idéal de A, on a $bu \in I$. D'où $bu \in B \cap I$.

   On conclut : $B \cap I$ est un idéal de B.

Eléments nilpotents d'un anneau commutatif

Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau commutatif A est un idéal de A.

Notons N l'ensemble des éléments nilpotents de A.

— $N \neq \emptyset$ car $0 \in N$

— Soit $(x, y) \in N^2$; il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $x^p = y^q = 0$. Puisque x et y commutent, on obtient par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(x+y)^{p+q-1} &= \sum_{k=0}^{p+q-1} C_{p+q-1}^k x^k y^{p+q-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} C_{p+q-1}^k x^k y^{q+(p-1-k)} + \sum_{k=p}^{p+q-1} C_{p+q-1}^k x^k y^{p+q-1-k}\end{aligned}$$

Puisque $x^p = 0$, on a :

$$\forall k \in \{p, ..., p+q-1\}, x^k = 0$$

Puisque $y^q = 0$, on a :

$$\forall k \in \{0, ..., p-1\}, y^{q+(p-1-k)} = 0$$

D'où : $(x+y)^{p+q-1} = 0$, donc $(x+y) \in N$.

— Soit $(a, x) \in A\mathrm{x}N$; il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p = 0$. On a alors, puisque a et x commutent : $(ax)^p = a^p x^p = 0$, et donc $(ax) \in N$.

Finalement, N est un idéal de A.

Condition nécessaire et suffisante sur les corps

Soit A un anneau commutatif. Montrer que A est un corps si et seulement si 0 et A sont les seuls idéaux de A, et $0 \neq 1$.

α) Supposons que A soit un corps, et soit I un idéal de A tel que $I \neq \{0\}$. Il existe $x \in I$ tel que $x \neq 0$, d'où $1 = x^{-1}x \in I$, puis I=A (d'après rappel qui suit).

β) Réciproquement, soit A un anneau commutatif n'admettant comme idéaux que 0 et A. Soit $x \in A - \{0\}$; l'idéal Ax n'est pas 0, donc Ax=A, et il existe $y \in A$ tel que yx=1.

Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. On peut montrer que $1 \in I \iff I = A$.

Démonstration. $1 \in I \implies (\forall a \in A, a = a1 \in I)$. □

Idéaux d'un anneau produit

Soient K, K' deux corps commutatifs, KxK' l'anneau produit. Trouver tous les idéaux de KxK'.

Plus généralement, montrons que, si A,A' sont deux anneaux commutatifs, les idéaux de AxA' sont les IxI' où I est un idéal de A et I' un idéal de A'.

Soit J un idéal de AxA' ; notons :

$$J_1 = pr_1(J) = \{a \in A; \exists a' \in A', (a,a') \in J\}$$

$$J_2 = pr_2(J) = \{a' \in A'; \exists a \in A, (a,a') \in J\}$$

Vérifier que J_1 (respectivement J_2) est un idéal de A (respectivement A') et que $J \subset J_1 \text{x} J_2$.

Soit $(x,y') \in J_1 \text{x} J_2$; il existe $x' \in A'$ et $y \in A$ tels que $(x,x') \in J$ et $(y,y') \in J$. Alors :

$$(x,0) = (x,x')(1,0) \in J \text{ et } (0,y') = (y,y')(0,1) \in J$$

d'où : $(x,y') = (x,0) + (0,y') \in J$.

Réponse : 0x0, 0xK', Kx0, KxK'.

Résolution d'un système de congruences simultanées

Résoudre le système de congruences simultanées, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x & \equiv 7[24] \\ x & \equiv 19[36] \\ x & \equiv 1[54] \end{cases}$$

---

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$x \equiv 7[24] \iff \exists a \in \mathbb{Z}, x = 24a + 7$$

2. On a, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, en notantb x=24a+7 :

$$x \equiv 19[36] \iff 24a + 7 \equiv 19[36] \iff 24a \equiv 12[36]$$

$$\iff 2a \equiv 1[3] \iff -a \equiv 1[3] \iff a \equiv -1[3]$$

$$\exists b \in \mathbb{Z}, a = 3b - 1$$

d'où :

$$x = 24a + 7 = 24(3b-1) + 7 = 72b - 17$$

3. On a, pour tout b $\in \mathbb{Z}$, en notant x = 72b - 17 :

$$x \equiv 1[54] \iff 72b \equiv 18[54] \iff 4b \equiv 1[3] \iff b \equiv 1[3] \iff \exists c \in \mathbb{Z} b = 3c{+}1$$

Ainsi,

$$x = 72b - 17 = 216c + 55$$

On conclut que l'ensemble S des solutions du système de congruences proposé est :

$$S = \{216c + 55, c \in \mathbb{Z}\}$$

Equation diophantienne du second degré

1. Montrer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$: $11|a^2 + b^2 \implies (11|a$ et $11|b)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$: $x^2 + y^2 = 11z^2$.

---

1. Calculons les carrés modulo 11 :

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
x^2	0	1	4	-2	5	3

On en déduit les sommes de deux carrés modulo 11 : *puisque* $a^2{+}b^2 = b^2{+}a^2$, *on ne remplit que la moitié du tableau*

	0	1	4	5	-2	3
0	0	1	4	5	-2	3
1		2	5	6	-1	4
4			8	9	2	7
5				10	3	8
-2					-5	1
3						6

D'après ce tableau :

$$a^2 + b^2 \equiv 0[11] \iff (a \equiv 0[11] \text{ et } b \equiv 0[11])$$

Autrement dit :

$$11|a^2 + b^2 \implies (11|a \text{ et } 11|b)$$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $x^2 + y^2 = 11z^2$. On a : $11|11z^2 = x^2 + y^2$, d'où, d'après la question précédente : $11|x$ et $11|y$. Il existe donc $X, Y \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 11X$ et $y = 11Y$. On a alors $11z^2 = x^2{+}y^2 = 11^2X^2{+}11^2{+}Y^2$, donc $z^2 = 11(X^2 + Y^2)$. D'où $11|z^2$, puis comme 11 est premier : $11|z$. Il existe donc $Z \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 11Z$. Alors : $11(X^2 + Y^2) = z^2 = 11^2Z^2$ donc

$X^2 + Y^2 = 11Z^2$. Ceci montre que 11 divise (x,y,z) et que en notant X,Y,Z $\in \mathbb{Z}$ tel que x=11X, y=11Y, z=11Z, (X,Y,Z) est aussi solution de l'équation proposée. Il en résulte (en réitérant) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (11^n|x, 11^n|y, 11^n|z)$$

d'où nécessairement : x=0, y=0, z=0.

Réciproquement, il est évident que le triplet (0,0,0) convient.

On conclut que l'ensemble S des solutions de l'équation proposée est $S = \{(0,0,0)\}$.

Un exercice pour les années impaires

Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) = n + 2015$.

Supposons l'existence d'une telle application f et soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$f(n + 2015) = f(f(f(n))) = (f \circ f)(f(n)) = f(n) + 2015$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$f(n + 2015k) = f(n) + 2015k$$

Il en résulte que le résidu de f(n) modulo 2015 ne dépend que du résidu de n modulo 2015. Ainsi, f induit une application $\hat{f}$ de $\mathbb{Z}/_{2015\mathbb{Z}}$ dans lui-même, définie par $\hat{f}(\hat{n}) = \widehat{f(n)}$, où $\hat{k}$ désigne le projeté de l'entier k dans $\mathbb{Z}/_{2015\mathbb{Z}}$. La propriété vérifiée par f implique que $\hat{f} \circ \hat{f} = Id$. Or, le cardinal de $\mathbb{Z}/_{2015\mathbb{Z}}$ est impair et toute involution de cardinal fini d'un ensemble impair admet au moins un point fixe (en effet, la permutation f est d'ordre 2 et se décompose donc en produit de transpositions à supports disjoints ; il y a donc une orbite réduite à un singleton). Il existe donc un entier $a \in \mathbb{N}$ (que l'on peut même prendre tel que $0 \leq a \leq 2015$) et $k \in \mathbb{N}$ tels aue $f(a) = a + 2015k$. On obtient alors

$$f(f(a)) = a + 2015 = f(a + 2015k) = f(a) + 2015k = a + 2.2015k$$

D'où l'on tire $2k = 1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{Z}$ et fournit la contradiction souhaitée.

Une équation dans $\mathbb{N}$

Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$a \neq b$$

$$a^b = b^a$$

En fait, il est possible de résoudre cela avec de l'algèbre (arithmétique) ; cependant, l'astuce réside dans le fait de traiter cela comme un problème d'analyse et de se restreindre ensuite à $\mathbb{N}^*$...

En effet, il suffit d'étudier les variation de :

$$x \mapsto \frac{ln(x)}{x}$$

pour montrer que l'ensemble solution $S = \{(2, 4), (4, 2)\}$.

Chapitre 14

Matrices & Déterminants

14.1 Exercices autour des déterminants

Borne supérieure du déterminant sur une boule unité

On note S l'ensemble des matrices $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $|a_{ij}| \leq 1$ pour tout couple (i,j) et on considère $\alpha = \sup\limits_{A \in S}(det(A))$. Montrer que α est fini, puis que *alpha* est un entier divisible par 2^{n-1}.

L'ensemble S est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$. Le déterminant étant continu, il est borné sur S et atteint sa borne supérieure. On peut donc affirmer que α est fini et qu'il est atteint. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans S une matrice telle que $det(A) = \alpha$. On va montrer qu'il est possible de choisir A avec tous ses coefficients dans $\{\pm 1\}$. Le déterminant est une fonction affine de chaque coefficient. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, il existe donc des fonctions polynômiales U_{ij} et V_{ij} des coefficients m_{kl}, mais indépendantes de m_{ij}, telles que pour toute matrice $M = (m_{kl})_{1 \leq k,l \leq n}$ on ait $det(M) = U_{ij}(M).m_{ij} + V_{ij}(M)$.

Si $U_{ij}(A) = 0$, rien ne nous empêche de remplacer le coefficient a_{ij} par 1 : cela ne change pas le déterminant. Si en revanche, $U_{ij}(A)$ est non nul, alors a_{ij} est nécessairement égale à ± 1 car, sur le segment [-1,1], une fonction affine non constante $a.x + b$ atteint nécessairement son maximum en 1 ou -1. Comme cela vaut pour tout couple (i,j), on a montré qu'il existe une matrice A de S telle que $det(A) = \alpha$ et dont tous les coefficients valent ± 1. Le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est un entier donc α est un entier.

Il ne reste plus qu'à prouver que qu'α est divisible par 2^{n-1}. Pour cela, on utilise la multilinéarité. Ajoutons la première colonne de A à chacune des autres. On peut alors mettre 2 en facteur dans chaque colonnes d'indice 2 à n. La multilinéarité du déterminant permet de conclure.

14.2 Autour de la comatrice

On appelle **cofacteur** A_{ij}, d'un élément de matrice a_{ij} d'une matrice carrée, le déterminant de la sous-matrice obtenue en éliminant la colonne et la ligne de cet élément, affecté du signe $(-1)^{i+j}$.

La **comatrice** d'une matrice carrée A est la matrice carrée constituée des cofacteurs de A.

Coefficients dans $\mathbb{Z}$

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Justifier que $det(A) \in \mathbb{Z}$
2. Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers si et seulement si $det(A) \pm 1$

---

1. Pour tout $A = (a_{i,j})$
$inM_n(\mathbb{C})$ on a :

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Par suite, si tous les $a_{i,j}$ sont entiers, det(A) l'est aussi.

2.

— ($\Longrightarrow$) – Si A et A^{-1} sont à coefficients entiers alors $det(A) \in \mathbb{Z}$ et $det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Or $det(A).det(A^{-1}) = det(AA^{-1}) = det(Id_n) = 1$. Donc $det(A) = det(A^{-1}) = \pm 1$.

— (Réciproque) – Si $det(A) = \pm 1$ alors A est inversible (déterminant non nul). Son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.^{\top}Com(A) = \pm^{\top}Com(A)$$

Or la comatrice de A est formée des cofacteurs de A qui sont des entiers car égaux à des déterminants de matrices à coefficients entiers (car extraites de A). Ainsi A^{-1} est une matrice à coefficients entiers.

Quelques propriétés de la comatrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $n \geq 2$. On note $ComA$ la comatrice de A.

1. Calculer ${}^\top ComA.A$.
2. Montrer successivement que :
   (a) Si $rg(A) = n$ alors $rg(ComA) = n$
   (b) Si $rg(A) = n - 1$ alors $rg(ComA) = 1$ (utiliser les applications linéaires)
   (c) Si $rg(A) \leq n - 2$ alors $rg(ComA) = 0$
3. Si on note A_{ij} le cofacteur de d'indice (i,j) de la matrice A, montrer que :
$$det(A) = 0 \implies \forall (i,j,k,l) \in \{1,...,n\}^4, A_{ik}.A_{jl} - A_{il}.A_{jk} = 0$$
4. Déduire $Com(ComA)$

---

1. C'est du cours ! ☺

Démonstration. Rappel de la démonstration □

2.a L'égalité précédente donne $det({}^\top ComA).det(A) = (det(A))^n$. Ainsi $det({}^\top ComA) = (det(A))^{n-1}$ puis que $det(A) \neq 0$. La comatrice de A, de déterminant non nul est donc de rang n (inversible).

2.b On munit $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique (e). ${}^\top ComA$ et A sont alors des matrices de endomorphismes respectifs g et f. L'égalité ${}^\top ComA.A = det(A).Id_n = 0_n$ s'écrit $g \circ f = 0$, autrement dit $Im(f) \subset Ker(g)$. Par hypothèse $rg(f) = n - 1$ et donc $dim(Ker(g)) \geq n - 1$. Puisque le rang de f (c'est-à-dire celui de A, c'est-à-dire l'ordre du plus grand déterminant extrait non nul de A) est égal à $(n-1)$, l'un au moins des cofacteurs de A est non nul. Autrement dit $ComA = 0$, et donc $g = 0$. L'inégalité $dim(Ker(g)) \geq n - 1$ est donc une égalité. Ainsi $rg(g) = n - dim(Ker(g)) = 1$.

2.c Si $rg(A) < n - 1$, tous les déterminants d'ordre n - 1 extraits de A sont nuls. La comatrice de A est donc nulle : $rg(ComA) = 0$.

3. Si det A = 0, on sait maintenant que Com A est de rang inférieur ou égal à 1. En particulier, tous ses déterminants extraits d'ordre 2 sont nuls. Autrement dit, pour tous indices i,j,k,l avec $i \neq j$ et $k \neq l$, on a :
$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix} = A_{ik}.A_{jl} - A_{jk}.A_{il} = 0$$
Si i=j ou si k=l, ce résultat est encore vrai (évident).

4. Si rg(A)=n alors :

$$^{\top}Com(Com(A)).Com(A) = det(Com(A)).Id_n = (det(A))^{n-1}.Id_n$$

Donc

$$^{\top}Com(Com(A)) = (det(A))^{n-1}.Com(A)^{-1}$$

Or $^{\top}Com(A).A = det(A).Id_n$ donc

$$^{\top}Com(A) = det(A).A^{-1}$$

puis sachant $^{\top}(B^{-1}) = (^{\top}B)^{-1}$, on a :

$$Com(Com(A)) = (det(A))^{n-2}.A$$

Si $rg(A) \leq n-1$ et $n \geq 3$ alors $rg(Com(A)) \leq 1 \leq n-2$ donc

$$Com(Com(A)) = 0_n$$

Si n=2 alors pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Com(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } Com(Com(A)) = A$$

Commutativité de comatrices

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que les matrices A et B commutent, montrer que les comatrices de A et B commutent.

I/ Cas A et B inversibles – Puisque A et B commutent, leurs inverses commutent aussi. On en déduit :

$$\frac{1}{det(A)}{}^{\top}Com(A).\frac{1}{det(B)}{}^{\top}Com(B) = \frac{1}{det(B)}{}^{\top}Com(B).\frac{1}{det(A)}{}^{\top}Com(A)$$

En simplifiant et en transposant

$$Com(A).Com(B) = Com(B).Com(A)$$

II/ Cas général – Pour p assez grand, les matrices

$$A + \frac{1}{p}.Id_n \text{ et } B + \frac{1}{p}.Id_n$$

sont inversibles et commutent donc

$$Com(A + \frac{1}{p}.Id_n).Com(B + \frac{1}{p}.Id_n) = Com(B + \frac{1}{p}.Id_n).Com(A + \frac{1}{p}.Id_n)$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$ on otient :

$$Com(A).Com(B) = Com(B).Com(A)$$

Une équation matricielle (comatricielle ☺)
Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation :

$$Com(M) = M$$

Soit M solution de l'équation étudiée. Puisque

$$^\top(Com(M)).M = det(M).Id_n$$

on obtient donc

$$^\top MM = det(M).Id_n$$

et donc

$$tr(^\top MM) = n.det(M)$$

Or

$$tr(^\top MM) = \sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^2$$

donc $det(M) \geq 0$. De plus en passant la relation $^\top MM = det(M).Id_n$ au déterminant, on obtient

$$(det(M))^2 = (det(M))^n$$

I – Cas $n \neq 2$. On obtient $det(M) = 0$ ou 1. Dans le cas $det(M) = 0$, on obtient $tr(^\top MM) = 0$ et donc $M = 0_n$. Dans le cas $det(M) = 1$, on obtient $^\top MM = Id_n$ et donc M est une matrice orthogonale de déterminant 1. Inversement, la matrice nulle est solution de l'équation étudiée et si M est une matrice orthogonale de déterminant 1 alors

$$^\top(Com(M)).M = Id_n = {}^\top MM$$

Ce qui donne $Com(M) = M$ sachant M inversible.

II – Cas $n = 2$. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $Com(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et donc $Com(M) = M$ si et seulement si M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Du *Bezout* dans l'air...
Soient deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{Z})$ telles que $det(A)$ et $det(B)$ soient premiers entre eux. Montrer l'existence de $U, V \in M_N(\mathbb{Z})$ tels que :

$$UA + VB = Id_n$$

D'après le théorème de Bezout, il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{Z}$ tel que

$$u.det(A) + v.det(B) = 1$$

Ainsi, $U = u.^{\top}(Com(A))$ et $V = v.^{\top}(Com(B))$ conviennent.

Comatrice d'une matrice symétrique
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que la comatrice de S est symétrique.

Le coefficient d'indice (i,j) de la comatrice de S est

$$(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

avec $\Delta_{i,j}$ le mineur d'indice (i,j) de la matrice S *i.e* le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de S. Or le déterminant d'une matrice est aussi celui de sa transposée et puisque la matrice S est symétrique, le mineur d'indice (i,j) est égale à celui d'indice (j,i). On en déduit que la comatrice de S est symétriques.

Chapitre 15

Algèbre Linéaire

15.1 Quelques endomorphismes particuliers

f est un homothétie $\iff \forall x \in E$ (x,f(x)) est liée

Démonstration. Rappel du principe :

— en dimension quelconque : appliquer la définition à x et y liés, puis libres, pour montrer que f(x)=λx avec le même λ pour x et y.

— en dimension finie : appliquer la définition aux vecteurs de base en montrant que $\exists \lambda tq \forall i f(e_i) = \lambda e_i$.

□

On peut aussi dire : un endomorphisme laissant stables toutes les droites vectorielles est une homothétie. On peut aussi les caractériser en disant qu'elle soit diagonalisable avec une seule valeur propre ou aussi en disant que c'est un endomorphisme commutant avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$.

p est un projecteur $\iff$ p est linéaire et $p^2 = p$. On a alors deux propriétés :

— E = Ker(p) $\oplus$ Im(p)

— Tr(p) = rg(p)

Démonstration. Le sev Im(p) de E admet au moins une base B_1, et le sev Ker(p) de E admet au moins une base B_2. Puisque p est un projecteur, on a : $Im(p) \oplus Ker(p) = E$, donc $B = B_1 \cup B_2$ (réunion ordonnée) est une base de E. La matrice A de p dans B est :

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

où $r = dim(Im(p)) = rg(p)$. On a donc :

$$tr(p) = tr(A) = r = rg(A) = rg(p)$$

$\square$

s est une symétrie $\iff$ s est linéaire et $s^2 = Id$

15.2 Exercices

Equivalence et ensembles
Soient U,V deux sev de E. Montrer que

$$U \cap V = U + V \iff U = V$$

La réciproque est triviale.
Pour le $\implies$, on suppose $U \cap V = U + V$. Puisque $U \subset U + V$, on a donc $U \subset U \cap V$ donc $U \subset V$. De même, $V \subset U$, donc $U = V$.

$\mathbb{Q}$-liberté d'une famille
Montrer que la famille $(ln(p))_{p\in\mathbb{P}})$, où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, est $\mathbb{Q}$-libre.

Par définition, la famille $(ln(p))_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre si et seulement si toute sous-famille est $\mathbb{Q}$-libre. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p_1, .., p_n \in \mathbb{P}$ deux à deux distincts, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{Q}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i ln(p_i) = 0$$

En réduisant $\alpha_1, .., \alpha_n$ au même dénominateur, il existe $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \alpha_i = \frac{a_i}{b}$$

D'où : $\sum_{i=1}^{n} a_i ln(p_i) = 0$, puis $\prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = 1$. Notons :

$$I = \{i \in \{1, ..., n\}; a_i \geq 0\}$$

$$J = \{i \in \{1, ..., n\}; a_i < 0\}$$

On a alors :

$$\prod_{i\in I} p_i^{a_i} = \prod_{j\in J} p_j^{-a_j}$$

Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers il en résulte :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, a_i = 0$$

puis,

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \alpha_i = 0$$

On conclut que la famille $(ln(p))_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Intersections de sous-espaces vectoriels – 1

Soient E un K-ev, A,B,C des sev de E tels que $B \subset C$. Montrer

$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + B$$

---

1) Soit $x \in (A+B)\cap C$. Il existe $a \in A$, $b \in B$ tels que x=a+b, et $x \in C$. On a : a = x-b, $x \in C$, $b \in B \subset C$, donc $a \in C$. Ainsi, x=a+b, $a \in A \cap C$, $b \in B$, donc $x \in (A \cap C) + B$. Ceci montre :

$$(A + B) \cap C \subset (A \cap C) + B$$

2) Réciproquement, soit $x \in (A \cap C) + B$. Il existe $y \in A \cap C$ et $b \in B$ tels que $x = y + b$. On a : $y \in A \cap C \subset A$ et $b \in B$, donc $x \in A + B$. D'autre part : $y \in A \cap C \subset C$ et $b \in B \subset C$, donc $x = y + b \in C$. D'où : $x \in (A + B) \cap C$. ceci montre :

$$(A \cap C) + B \subset (A + B) \cap C$$

On peut donc conclure quant à l'égalité souhaitée.

Intersections de sous-espaces vectoriels – 2

Soient E un K-ev de dimension finie, $(F_i)i \in I$ une famille de sev de E. Montrer qu'il existe deux parties finies U,V de I telles que :

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in U} F_i \;\underline{\text{et}}\; \sum_{i\in I} F_i = \sum_{i\in V} F_i$$

---

1. Considérons l'ensemble M des m $\in \mathbb{N}$ tels qu'il existe une partie finie A de I telle que m = dim($\underset{i\in A}{\cap} F_i$). On a M $\subset \mathbb{N}$ et dim(E) $\in M$ car $\underset{i\in\emptyset}{\cap} F_i = E$, donc dim(E)=dim($\underset{i\in\emptyset}{\cap} F_i$). Ainsi, M est une partie non vide de $\mathbb{R}$, donc M admet un plus petit élément m_0. Il existe une partie finie U de I telle que :

$$m_0 = dim(\underset{i\in U}{\cap} F_i)$$

Nous allons montrer : $\underset{i\in I}{\cap} F_i = \underset{i\in U}{\cap} F_i$.

— Puisque $U \subset I$, on a :

$$\underset{i\in I}{\cap} F_i \subset \underset{i\in U}{\cap} F_i$$

— Notons $F = \underset{i\in U}{\cap} F_i$. Soit $i \in I$. On a $F_i \cap F \subset F$, et d'autre part, par définition de m_0, $dim(F_i \cap F) \geq m_0 = dim(F)$, d'où nécessairement $F_i \cap F = F$ et donc $F \subset F_i$. Ceci montre :

$$\forall i \in I, F \subset F_i$$

donc :

$$F \subset \underset{i\in I}{\cap} F_i$$

Finalement :

$$\underset{i\in I}{\cap} F_i = \underset{i\in U}{\cap} F_i$$

2. Considérons l'ensemble N des $n \in mathbbN$ tels qu'il existe une partie finie B de I telle que n=dim($\sum_{i\in B} F_i$). On a $N \subset \mathbb{N}$ et $0 \in N$ car $\sum_{i\in\emptyset} F_i = \{0\}$, donc $0 = dim(\{0\}) = dim(\sum_{i\in\emptyset} F_i)$. De plus, comme E est de dimension finie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq dim(E)$$

Ainsi, N est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée, donc N admet un plus grand élément n_0. Il existe une partie finie V de I telle que :

$$n_0 = dim(\sum_{i\in V} F_i)$$

Nous allons montrer : $\sum_{i\in I} F_i = \sum_{i\in V} F_i$.

— Puisque $V \subset I$, on a :

$$\sum_{i\in V} F_i \subset \sum_{i\in I} F_i$$

— Notons $G = \sum_{i\in V} F_i$. Soit $i \in I$. On a $G \subset F_i + G$, et d'autre part, par définition de n_0, $dim(F_i + G) \leq n_0 = dim(G)$, d'où nécessairement $G = F_i + G$, et donc $F_i \subset G$. Ceci montre :

$$\forall i \in I, F_i \subset G$$

donc :

$$\sum_{i\in I} F_i \subset G$$

Finalement :

$$\sum_{i\in I} F_i = \sum_{i\in V} F_i$$

Une inégalité de dimensions entre noyau et image

Soient E,F deux K-ev de dimensions finies, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer :

$$dim(Ker(f+g)) \leq dim(Ker(f) \cap Ker(g)) + dim(Im(f) \cap Im(g))$$

Considérons l'application

$$u : Ker(f+g) \to F, x \mapsto u(x) = f(x)$$

restriction de f à Ker(f+g) au départ. Il est clair que u est linéaire.

— Déterminons Ker(u). On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in Ker(u) \quad &\iff \begin{cases} x \in Ker(f+g) \\ f(x) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \\ &\iff x \in Ker(f) \cap Ker(g) \end{aligned}$$

d'où

$$Ker(u) = Ker(f) \cap Ker(g)$$

— Etudions Im(u). Soit $y \in Im(u)$. Il existe $x \in Ker(f+g)$ tel que $y = u(x) = f(x)$. On a alors : $y = f(x) \in Im(f)$. D'autre part, (f+g)(x) = 0 :

$$y = f(x) = -g(x) = g(-x) \in Im(g)$$

Ceci montre :

$$Im(u) \subset Im(f) \cap Im(g)$$

— En appliquant le théorème du rang à u, on obtient :

$$\begin{aligned} dim(Ker(f+g)) \quad &= dim(Ker(u)) + dim(Im(u)) \\ &\leq dim(Ker(f) \cap Ker(g)) + dim(Im(f) \cap Im(g)) \end{aligned}$$

Equivalence de propriétés

Soit E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \mathcal{GL}(E)$
2. pour tous sev A,B de E supplémentaires dans E, les sev f(A),f(B) sont supplémentaires dans E.

---

1 implique 2. On suppose $f \in \mathcal{GL}(E)$. Soient A,B deux sev de E supplémentaires dans E. Alors :

$$f(A) + f(B) = f(A + B) = f(E) = E$$

et puisque f est injective :

$$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$$

Donc f(A) et f(B) sont des sev supplémentaires dans E.

2 implique 1. On suppose aue, pour tous sev A,B supplémentaires dans E, les sev f(A),f(B) sont supplémentaires dans E.

— Puisque 0 et E sont supplémentaires dans E, f(0) et f(E) sont supplémentaires dans E, d'où

$$E = f(\{0\}) + f(E) = \{0\} + f(E) = Im(f)$$

et donc f est surjective.

— Puisque $f \in \mathcal{L}(E)$ est surjective et que E est de dimension finie, on conclut $f \in \mathcal{GL}(E)$.

Un calcul de dimension

Soit U un sev de E et A l'ensemble des endomorphismes f de E tels que : $U \subset Ker(f)$.

1. Montrer que A est un espace vectoriel
2. En déterminer la dimension

---

1. De manière assez classique, on va montrer que A est un sev de $\mathcal{L}(E)$:

— C'est une partie de $\mathcal{L}(E)$ qui contient l'application nulle puisque le noyau de celle-ci est E tout entier.

— — on a toujours $Ker(f) \subset Ker(\lambda f)$ donc $\lambda f \in A$

  — si f et g sont dans A et x dans U, f(x)=g(x)=0 donc f(x)+g(x)=0

Donc A est bien un espace vectoriel.

2. On ne va pas s'amuser à trouver une base de A ; par contre, on sait qu'une application linéaire est parfaitement définie par sa restriction à des sev supplémentaires. Or si f est dans A, f est parfaitement définie sur U (elle y est nulle), soit donc V un supplémentaire de U dans E. f est parfaitement définie si on se donne sa restriction à V. En d'autres termes, il faut définir un isomorphisme entre deux espaces :

$$\begin{array}{ll}\Phi: & \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(U,E) \times \mathcal{L}(V,E) \\ & f \to (f_{|U}, f_{|V})\end{array}$$

C'est un isomorphisme. Par construction :

$$A = \Phi^{-1}\{(0,v), v \in \mathcal{L}(V,E)\}$$

l'espace de droite étant isomorphe à $\mathcal{L}(V,E)$, donc de dimension dimV.dimE. Ainsi :

$$dim(A) = dim(E).(dim(E) - dim(U))$$

Une non-réduction au complémentaire

Soit F un sev strict de E non réduit à 0 et G son **complémentaire** dans E et $H = G \cup \{0\}$. H est-il un sev de E ?

Si cela était vrai, cela se saurait ! ☺Montrons alors que c'est faux en supposant que H est un sev de E. Notons déjà que H est non réduit à 0 sinon F serait égal à E. Donc on peut prendre un couple (x,y) de FxH différent de (0,0). Remarquons aussi que $F \cap H = \{0\}$.

Regardons maintenant x+y. Si $x + y \in F$, alors, $y = (x + y) + (-x)$ ($\in F + F$) donc y est dans F ; or il est dans H ; donc y est nul, ce qui n'est pas vrai ! Donc x+y n'est pas dans F, il est donc dans son complémentaire G, donc dans H. Le même raisonnement que précédemment amène à une contradiction (x est nul).

Moralité : H n'est pas un sous-espace vectoriel.

Indépendances $\mathbb{Q}$-linéaires

1. Montrer que $(1, \sqrt{2})$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.
2. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.
3. Soit p,q,r trois projecteurs non nuls et $f = p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3}$. f peut-il être un projecteur ?

---

1. Supposons donc $a + b\sqrt{2} = 0$ (notée (*))avec a et b rationnels non tous les deux nuls. On peut succéssivement se ramener à :

- (a,b) entiers (il suffit de multiplier (*) par le ppcm des dénominateurs) non nuls (si l'un est nul l'autre aussi).
- (a,b) sont premiers entre eux (il suffit de diviser (*) par leur pgcd).

On a alors en changeant un terme de membre et en élevant au carré :

$$a^2 = 2b^2$$

Si on se rappelle les rudiments de l'arithmétique, on voit qu'il est possible d'appliquer le théorème de Gauss ici : 2 divise le membre de droite, donc divise le membre de gauche. Donc 2 divise a : $a = 2\alpha$; en reportant il vient :

$$b^2 = 2\alpha^2$$

Le même raisonnement prouve que 2 divise b ; or a et b dont premiers entre eux... *Remarque : on vient de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel...*

2. On recommence : supposons qu'il existe un triplet de rationels non tous nuls tel que :

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

On se ramène comme au cas de la première question au cas d'entiers premiers dans leur ensemble. En élevant au carré après avoir fait passer le dernier terme dans l'autre membre, il vient, après réarrangement :

$$(a^2 - 3c^2 + 2b^2) + ab\sqrt{2} = A + B\sqrt{2} = 0$$

où A et B sont des entiers relatifs. D'après la question précédente, ils sont nécessairement nuls, donc ou a ou b est nul. On aboutit ensuite facilement à une contradiction en reproduisant un raisonnement similaire à celui fait lors de la question 1.

3. Il faut se souvenir des liens qui existent entre trace et projecteur. En effet, si f est un projecteur, on aurait :

$$rg(f) = tr(f) = tr(p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3}) = rg(p) + \sqrt{2}.rg(q) + \sqrt{3}.rg(r)$$

qui est un relation de liaison à coefficient entiers (donc rationnels) **non tous nuls** (les rangs) pour $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$, ce qui est impossible d'après la deuxième question. Donc f n'est pas un projecteur.

On dit que a et b sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants si $\nexists(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $\lambda.a + \mu.b \in \mathbb{Q}$.

Une CNS

Soit F et G deux sev de E de dimension n. Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple (*typiquement constructiviste*) pour qu'il existe un endomorphisme f de E de noyau F **et** d'image G.

Ici il faut évidemment tout de suite penser au théorème du rang qui relie les dimensions de F et G : dimF+dimG=dimE=n. On sait déjà construire un endormorphisme de noyau F donné : à savoir un projecteur p parallèlement à F sur un supplémentaire H de F dans E :

$$E = H \oplus F = Im(p) \oplus Ker(p)$$

Or H est isomorphe à G (ils ont même dimension n-dimF) soit : $H \overset{\Phi}{\cong} G$.

A partir de là, il est naturel d'envisager $f = \Phi \circ p$ et de voir qu'il convient :

— $\Phi(p(x)) = 0 \underset{\Phi \text{ bijectif}}{\iff} p(x) = 0 \iff x \in F$ donc Ker(f)=F.

— — Im(f) est de même dimension que Im(p)=H (car Φ est isomorphisme)
  — Im(f) est inclus dans G car $Im(f) \subset Im(\Phi) = G$. Donc Im(f)=G.

Et voilà... ☺

Autour du théorème du rang

On note E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{R} = \{(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 tq : f \circ g = 0\}$. Déterminer $\sup\limits_{\mathcal{R}}(rg(f) + rg(g))$.

Il est évidemment heureux de se dire qu'il va falloir travailler avec le théorème du rang ! La définition de $\mathcal{R}$ invite à écrire :

$$(f, g) \in \mathcal{R} \iff Im(g) \subset Ker(f) \implies dim(Im(g)) = rg(g) \leq dim(Ker(f)) = n - rg(f)$$

Ce qu'on peut voir comme :

$$rg(f) + rg(g) \leq n \text{ notée (*)}$$

Il ne s'agit surtout pas de conclure ici, on a seuelement prouvé que :

$$\sup_{\mathcal{R}}(rg(f) + rg(g)) \leq n$$

en passant au sup dans la relation (*).

Il reste maintenant à savoir si cette borne est atteinte ou non. Sinon, on est mal parti et il faudra affiner (car *on est certain que le sup est un max*, vu qu'on est dans un ensemble d'entiers bornés).

Heureusement, en prenant (f,g)=(Id,0) $\in \mathcal{R}$ on voit que n est atteint et c'est fini.

Chapitre 16

Dualité

Chapitre 17

Réduction d'endomorphismes

17.1 Exercices

17.1.1 Eléments et valeurs propres

Stabilité et composition

Soient E un K-ev, f,g$\in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que tout sous-espace propre pour f est stable par g, et que Ker(f) et Im(f) sont stables par g.

---

1. Soient $\lambda \in K, x \in Ker(f - \lambda Id_E)$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \lambda Id_E)(g(x)) \quad &= (f \circ g)(x) - \lambda g(x) \\ &= (g \circ f)(x) - \lambda g(x) \\ &= g(\lambda x) - \lambda g(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc, $g(x) \in Ker(f - \lambda Id_E)$. En prenant $\lambda = 0$: Ker(f) est stable par g. En prenant $\lambda \in Sp_K(f)$: SEP(f,λ)=Ker(f- λId_E) est stable par g.

2. Soit $y \in Im(f)$. Il existe $x \in E$ tel que y=f(x), d'où :

$$g(y) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \in Im(f)$$

AB et BA – 1

Soient n,p $\in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(K), B \in M_{p,n}(K)$.

1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non-nulles, c'est-à-dire :

$$Sp_K(AB) - \{0\} = Sp_K(BA) - \{0\}$$

2. Soit $\lambda \in K$ une valeur propre non nulle de AB. Montrer que les sous-espaces propres pour AB et por BA associés à λ ont la même dimension.

1.

— Soit $\lambda \in Sp_K(AB)-\{0\}$. Il existe $\chi M_{n,1}(K)-\{0\}$ tel que : $(AB)X = \lambda X$. On déduit :

$$BA(BX) = B(AB(X)) = B(\lambda X) = \lambda BX$$

On a $BX \neq 0$, car si BX=0, on a $\lambda X = (AB)X = A(BX) = 0$, contradiction avec $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$. Ceci montre que λ est valeur propre de BA et que BX est un vecteur propre pour BA associé à la valeur propre λ. Il en résulte : $Sp_K(AB) - \{0\} \subset Sp_K(BA) - \{0\}$.

— Comme A et B jouen des rôles symétriques, on a aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité recherchée :

$$Sp_K(AB) - \{0\} = Sp_K(BA) - \{0\}$$

2. Soit $\lambda \in Sp_K(AB)-\{0\}$. D'après la question précédente, $\lambda \in Sp_K(BA)-\{0\}$ et : $\forall X \in SEP(AB,\lambda), BX \in SEP(BA,\lambda)$. Considérons l'application :

$$f : SEP(AB,\lambda) \to SEP(BA,\lambda), X \mapsto f(X) = BX$$

L'application f est linéaire, car, pour tous $\alpha \in K, X_1, X_2 \in SEP(AB,\lambda)$:

$$f(\alpha X_1 + X_2) = B(\alpha X_1 + X_2) = \alpha BX_1 + BX_2 = \alpha f(X_1) + f(X_2)$$

De même, par rôles symétriques, l'application

$$g : SEP(BA,\lambda) \to SEP(AB,\lambda), Y \mapsto g(Y) = AY$$

est linéaire. On a :

$$\forall X \in SEP(AB,\lambda), (g \circ f)(X) = g(BX) = A(BX) = (AB)X = \lambda X$$

Donc, $(g \circ f) = \lambda ID_{SEP(AB,\lambda)}$. De même, par rôles symétriques, $(g \circ f) = \lambda ID_{SEP(BA,\lambda)}$. Comme $\lambda \neq 0$, on déduit :

$$(\frac{1}{\lambda}g) \circ f = Id_{SEP(AB,\lambda)} \text{ et } f \circ (\frac{1}{\lambda}g) = Id_{SEP(BA,\lambda)}$$

Il en résulte que f est un isomorphisme de K-ev de SEP(AB,λ) sur SEP(BA,λ). (*L'endomorphisme réciproque de f est $\frac{1}{\lambda}g$.*) Comme ces deux sev sont de dimensions finies, on en conclut qu'ils ont la même dimension.

AB et BA – 2

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Peut-on affirmer que AB et BA ont au moins un vecteur propre commun ?

Considérer par exemple :

$$n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'ont aucun vecteur propre commun puisque les vecteurs propres de BA sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que ni $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ni $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est vecteur propre pour AB.

Réponse : **non**.

Détermination de valeurs propres et vecteurs propres

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, E le $\mathbb{C}$-ev des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\leq n$, $f : E \to E$, telle que $P \mapsto ((X+\alpha)P)'$ qui est un endomorphisme de E. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.

---

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}, P \in E - \{0\}$ tels que $f(P) = \lambda P$, c'est-à-dire :

$$(X+\alpha)P' + (1-\lambda)P = 0$$

Si $\lambda \neq 1$, on déduit $P(-\alpha) = 0$. Il existe donc $k \in \{0, ..., n\}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$\begin{cases} P & = (X+\alpha)^k Q \\ Q(-\alpha) & \neq 0 \end{cases}$$

(k est l'ordre de multiplicité du zéro $-\alpha$ de P) En reportant : $(X+\alpha)Q' + (k+1-\lambda)Q = 0$. Comme $Q(-\alpha) \neq 0$, on déduit $k+1-\lambda = 0$, puis Q'=0, donc deg(Q)=0. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $k \in \{0, ..., n\}$ tels que

$$\lambda = k+1 \text{ et } P = C(X+\alpha)^k$$

2. Réciproquement : $f((X+\alpha)^k) = (k+1)(X+\alpha)^k$ pour tout k de 0,...,n.

Réponse :

— $Sp_{\mathbb{C}}(f) = \{1, ..., n+1\}$
— $\forall \lambda \in \{1, ..., n+1\}, SEP(f, \lambda) = \mathbb{C}(X+\alpha)^{\lambda-1}$

Gershgorin & Hadamard
1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer :

$$Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \underset{i\in[\![1,n]\!]}{\cup} B'(a_{ii}, \sum_{1\leq j\leq n; j\neq i} |a_{ij}|)$$

(où, pour $(a,r) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}_+, B'(a,r) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| \leq r\}$). *Ces disques sont appelés les disques de Gershgorin de A.*
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, |a_{ij}| > \sum_{1\leq j\leq n; j\neq i} |a_{ij}|$$

(on dit que A est à diagonale strictement dominante). Démontrer :

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$$

Ce résultat est le théorème d'Hadamard.

---

1. Soient $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in SEP(A, \lambda) - \{0\}$. Il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que :

$$|x_{i_0}| = \|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Comme $AX = \lambda X$, on obtient en prenant la ligne numéro i_0 :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |(\lambda - a_{i_0 i_0})x_{i_0}| &= |\textstyle\sum_{1\leq j\leq n; j\neq i_0} a_{i_0 j} x_j| \\ &\leq \textstyle\sum_{1\leq j\leq n; j\neq i_0} |a_{i_0 j}||x_j| \\ &\leq (\textstyle\sum_{1\leq j\leq n; j\neq i_0} |a_{i_0 j}|)|x_{i_0}| \end{aligned}$$

Comme $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$, et donc :

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{1\leq j\leq n; j\neq i_0} |a_{i_0 j}|$$

2. Par hypothèse,

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, 0 \notin B'(a_{ii}, \sum_{1 \leq j \leq n; j \neq i_0} |a_{ij}|)$$

D'après la première question, on déduit : $0 \notin Sp_{\mathbb{C}}(A)$, c'est-à-dire :

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$$

17.1.2 Polynômes caractéristiques

Divisibilité de polynômes caractéristiques

Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E stable par f, $f' : F \to F$ l'endomorphisme induit par f sur F. Montrer :

$$\chi_{f'} | \chi_f$$

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, ..., e_p)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{p+1}, ..., e_n \in E$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ soit une base de E. En notant $A = Mat_{\mathcal{B}_1}(f')$, il existe $B \in M_{p,n-p}(K)$ et $C \in M_{n-p}(K)$ telles que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout λ de K :

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= det \begin{pmatrix} A - \lambda I_p & B \\ 0 & C - \lambda I_{n-p} \end{pmatrix} \\ &= det(A - \lambda I_p).det(C - \lambda I_{n-p}) \\ &= \chi_{f'}(\lambda).\chi_C(\lambda) \end{aligned}$$

Comme $\chi_C \in K[X]$, on conclut : $\chi_{f'} | \chi_f$.

Un propriété sur les dimensions impaires

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie impaire, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une droite et un hyperplan de E stables par f.

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Puisque n est impair, χ_A, qui est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ en $+\infty$, $+\infty$ en $-\infty$, admet au moins un zéro réel (théorème des valeurs intermédiaires). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E - \{0\}$ tels que $f(x) = \lambda x$. Alors, $\mathbb{R}x$ est une droite vectorielle stable par f.
2. Le raisonnement précédent (appliqué à ${}^\top A$ au lieu de A) montre qu'il existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ et $X' \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tels que ${}^\top AX' = \lambda' X'$. Notons $H = \{Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^\top X'Y = 0\}$, qui est un hyperplan de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in H$. On a :

$$ {}^\top X'(AY) = {}^\top({}^\top AX')Y = {}^\top(\lambda' X')Y = \lambda' {}^\top X'Y = 0 $$

donc $AY \in H$.

Ceci montre que H est stable par A. L'hyperplan de E associé à H dans la base $\mathcal{B}$ est donc stable par f.

Une propriété sur l'avant-dernier coefficient du polynôme caractéristique

Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(K)$, $\chi_A = (-1)^n X^n + ... + \alpha_{n-1}X + \alpha_n$ le polynôme caractéristique de A. Montrer :

$$\alpha_{n-1} = -tr(com(A))$$

Le terme de degré 1 en λ dans

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

est : $-\lambda A_{11} - \lambda A_{22} - ... - \lambda A_{nn}$, où A_{ii} est à la fois le mineur et le cofacteur de a_{ii} dans A. *C.Q.F.D.*

Un polynôme caractéristique en fonction d'un autre

Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(K)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$$

Exprimer χ_M en fonction de χ_A.

Par opération sur les colonnes puis sur les lignes :

$$\begin{aligned}\chi_M(\lambda) &= det\begin{pmatrix}-\lambda I_n & A\\ A & -\lambda I_n\end{pmatrix}\\ &= det\begin{pmatrix}-\lambda I_n + A & A\\ A-\lambda I_n & -\lambda I_n\end{pmatrix}\\ &= det\begin{pmatrix}A-\lambda I_n & A\\ 0 & -A-\lambda I_n\end{pmatrix}\\ &= (-1)^n.det(A-\lambda I_n).det(A+\lambda I_n)\end{aligned}$$

---

pgcd de polynômes caractéristiques et rang

1. Soient E un K-ev de dimension finie ≥ 1, u,f,g$\in \mathcal{L}(E)$ tels que $u\circ f = g\circ u$. Démontrer :
$$deg(pgcd(\chi_f,\chi_g)) \geq rg(u)$$
2. En particulier, si E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie ≥ 1 et si f,g$\in \mathcal{L}(E)$ sont tels qu'il existe u$\in \mathcal{L}(E)-\{0\}$ tel que $u\circ f = g\circ u$, alors f et g ont au moins une valeur propre commune.

---

1. Soient $\mathcal{B}_0$ une base de E,F,G,U les matrices dans $\mathcal{B}_0$ de f,g,u respectivement. Il existe $P,Q \in GL_n(K)$ telles que, en notant, r=rg(u) et J=$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \in M_n(K)$ on ait $U = Q^{-1}JP$ (*confer les cours de MPSI*). En notant $F' = PFP^{-1}$ et $G' = QGQ^{-1}$, déduire
$$JF' = G'J$$
On décompose F' et G' en blocs :
$$F' = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} \text{ et } G' = \begin{pmatrix}X & Y\\ Z & T\end{pmatrix} \text{ où } A\in M_r(K), ...$$
Alors, $JF' = G'J \implies (A = X, B = 0, Z = 0)$, d'où :
$$F' = \begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}, G' = \begin{pmatrix}A & Y\\ 0 & T\end{pmatrix}$$
Puis :
$$\chi_f = \chi_F = \chi_{F'} = \chi_A.\chi_D \text{ et } \chi_g = \chi_G = \chi_{G'} = \chi_A.\chi_T$$
donc χ_A, qui est de degree r, divise χ_f et χ_g.

2. D'après la question précédente : $deg(pgcd(\chi_f,\chi_g)) \geq 1$. Le théorème de d'Alembert montre que $pgcd(\chi_f,\chi_g)$ admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}$, et donc f et g ont au moins une valeur propre commune.

Théorème fondamental de l'algèbre : d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine. En conséquence, tout polynôme à coefficients entiers, rationnels ou encore réels admet au moins une racine complexe, car ces nombres sont aussi des complexes. Une fois ce résultat établi, il devient simple de montrer que sur $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes, tout polynôme P est scindé, c'est-à-dire constant ou produit de polynômes de degré 1.

17.1.3 Diagonalisation

Recherche d'éléments propres

Eléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 1 & & \\ ab & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & ab & a+b \end{pmatrix}$$

avec $ab \neq 0$

En posant dès maintenant $x_0 = x_{n+1} = 0$, les équations (du type : $\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j = \lambda.x_i$) se mettent sous la forme :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], ab.x_{i-1} + (a+b-\lambda).x_i + x_{i+1} = 0$$

Il faut donc discuter sur l'équation caractéristique :

$$ab.r^2 + (a+b-\lambda).r + 1 = 0 \text{ (E)}$$

— Ou bien (E) a une racine double r alors classiquement :

$$x_i = (\alpha i + \beta).r^i$$

ce qui compte tenu des conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ impose $\alpha = \beta = 0$ et donc $x_i = 0$ pour tout i ; ce qui ne convient pas (vecteur propre = vecteur **non nul**).

— Ou (E) a deux racines distinctes (r_1,r_2) (éventuellement complexes), alors on a :

$$x_i = \alpha.r_1^i + \beta.r_2^i$$

Puisque $x_0 = 0$ on a : $x_i = \alpha.r_1^i - \alpha.r_2^i$. Reste alors à utiliser la condition $x_{n+1} = 0$:

— ou bien $r_1^{n+1} \neq r_2^{n+1}$ alors $\alpha = 0$ et $x_i = 0$ pour tout i ce qui ne convient toujours pas.

— ou bien $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$; or aucune des racines n'est nulle (leur produit ab est non nul par hypothèse de l'énoncé) donc cela équivaut à dire que leur rapport est une racine (n+1)-ième de l'unité donc il existe un entier m tel que :

$$\frac{r_1}{r_2} = \exp(\frac{2im\pi}{n+1})$$

La résolution de l'équation (E) donne alors facilement :

$$\begin{cases} r_1 & = \rho.e^{\frac{im\pi}{n+1}} \\ r_2 & = \rho.e^{-\frac{im\pi}{n+1}} \\ x_k & = -2i\alpha\rho^k.\sin(\frac{km\pi}{n+1}) \\ \lambda & = a+b+r_1+r_2 = a+b+2\rho.\cos(\frac{m\pi}{n+1}) \end{cases}$$

ρ étant une racine de ab.

L'entier m pouvant prendre toute valeur entre 1 et n (la valeur 0 est exclue sinon les racines de (E) seraient égales) on obtient **n valeurs propres distinctes** et les propres sont les droites associées.

Remarque : Cet exemple se généralise aisément à toute matrice trigonale dont les coefficients sur la sur-diagonale et la sous-diagonale et sur la diagonale sont égaux (sur chacune des trois, pas TOUS égaux !)...

Résoudre un système en (λ, x) en utilisant un récurrence.

— **Cas d'emploi :** l'intérêt est réel quand les équations se mettent sous la forme d'une relation de récurrence simple (notamment linéaire). Le cas le plus fréquent est celui des matrices tridiagonales.

— **Intérêt :** on sait expliciter aisément les temes d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1 ou 2 en fonction des racines de l'équation caractéristique associée. Le calcul des éléments propres est donc facile à mener.

— **Principe :** Il faut considérer aue les coordonnées (x_i) d'un vecteur propre X, i variant de 1 à n, sont des termes d'une suites (x_n) telle que :

$$x_0 = x_{n+1} = 0$$

(on peut en effet parfaitement définir ainsi les termes d'indice 0 et n+1 vu qu'ils ne sont pas encore définis).

Une recherche de sev stables par un endomorphisme

Trouver tous les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

— Former le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda^2 + 3)$$

— SEP(A,3) est de dimension 1, engendré par $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— Les sev stables de dimension 0,1,3 sont : 0,$\mathbb{R}V$,$\mathbb{R}^3$. Il reste à trouver les plans stables. Remarquer que le plan $P_0 = Ker(f^2 + 3e)$, d'équation $x + y + z = 0$, est stable par f.
Soit P un plan stable par f, autre que P_0 (s'il existe). Alors, $P \cap P_0$ est une droite vectorielle stable, donc $P \cap P_0 = \mathbb{R}V$. Donc $V \in P_0$, ce qui n'est pas. Ainsi, P_0 est le seul plan stable.

Réponse :

$$\{0\}, \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ le plan d'équation } x + y + z = 0, \mathbb{R}^3$$

Montrer une nilpotence dans un cas particulier

Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\begin{cases} f \circ g - g \circ f = \alpha f \\ g \text{ est diagonalisable.} \end{cases}$$

1. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n \circ g - g \circ f^n = n.\alpha.f^n$$
2. En déduire que f est nilpotent.

---

1. On va procéder par récurrence sur n.

— La propriété est vraie pour n=1 par hypothèse.

— Supposons cette propriété vraie pour un n de $\mathbb{N}^*$; alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1}\circ g - g\circ f^{n+1} &= f\circ(f^n\circ g) - g\circ f^{n+1} \\ &= f\circ(g\circ f^n + n\alpha f^n) - g\circ f^{n+1} \\ &\text{ on développe puis on factorise par } f^n \\ &= n\alpha f^{n+1} + (f\circ g - g\circ f)\circ f^n \\ &= n\alpha f^{n+1} + \alpha f\circ f^n \\ &= (n+1)\alpha f^{n+1} \end{aligned}$$

2.

— Soient $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(g)$ et x un vecteur propre associé : $x \neq 0$ et $g(x) = \lambda x$. On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$g(f^n(x)) = f^n(g(x)) - n\alpha f^n(x) = (\lambda - n\alpha)f^n(x)$$

Puisque $Sp_{\mathbb{C}}(g)$ est fini et que α n'est pas nul, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda - n\alpha \notin Sp_{\mathbb{C}}(g)$, et on a alors $f^n(x) = 0$.

— Puisque g est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_p)$ de E (p=dim(E)) formée de vecteurs propres pour g. On vient de voir que, pour chaque i de 1,...,p, il existe $n_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{n_i}(x_i) = 0$. En notant $N = \max\limits_{1\leq i\leq p} n_i$, on a : $\forall i \in \{1, ..., p\}, f^N(x_i) = 0$, donc $f^N = 0$.

Racine d'une matrice diagonalisable inversible

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A^p soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable. La propriété subsiste-t'elle si A n'est pas inversible ?

Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r$ dans $\mathbb{C}$ deux à deux distinctes tels que le polynôme $(X-\lambda_1)...(X-\lambda_r)$ annule A^p. Par conséquent, $(X^p-\lambda_1)...(X^p-\lambda_r)$ annule A. Ce polynôme est scindé à racines simples, car pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $X^p - \lambda$ est scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}^n$, tout nombre complexe non nul admet exactement p racines p-ièmes) et si $\lambda \neq \mu$, $X^p - \lambda$ et $X^p - \mu$ n'ont aucune racine en commun. Il s'ensuit que A est diagonalisable.

La propriété ne subsiste pas si A n'est pas inversible : par exemple, si A est nilpotente non nulle, $A^n = 0$ est diagonalisable sans que A le soit.

Matrice à termes sur la seconde diagonale

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & \iddots & & \\ a_1 & & & \end{pmatrix}$$

Manifestement, A n'est pas symétrique en général. On peut ici au choix écrire le système et discuter, ou raisonner en termes de sous-espaces stables, ce qui semble particulièrement naturel vu la *forme* de la matrice. En effet, si on pose pour tout k tel que cela ait un sens :

$$F_k = Vect(e_k, e_{n-k+1})$$

on constate que ces espaces sont stables par A. Or la restriction de f (endomorphisme associé à A) à un tel sous-espace vectoriel s'écrit :

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1-k} \\ a_k & 0 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique n'est pas trop dur à calculer :

$$\chi_{A_k}(X) = a_k.a_{n+1-k} - X^2$$

Examinons tous les cas possibles (nous sommes dans $\mathbb{C}$) :

— ou bien $a_k.a_{n+1-k} \neq 0$: alors le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes (dans $\mathbb{C}$) et donc A_k est diagonalisable.

— ou bien $a_k.a_{n+1-k} = 0$ qui s'examine en deux temps :
  - — les deux réels sont nuls : alors A_k est diagonalisable (elle est nulle donc diagonale donc diagonalisable).
  - — un seul réel est nul : la seule valeur propre est zéro, l'espace propre associée est de dimension 1 et donc elle est non diagonalisable.

Reste maintenant à remonter au cas plus général de A.

Il est manifeste que :

$$E = \bigoplus_k F_k$$

on conclut en utilisant (résultat classique) que A est diagonalisable si et seulement si la restriction de f à chacun des F_k est diagonalisable.

Conclusion : La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc : pour chaque couple (a_k, a_{n-k+1}) <u>les deux</u> complexes sont nuls ou <u>aucun</u> n'est nul.

Remarque : Ce raisonnement est parfaitement valable que n soit pair ou impair...

Diagonalisation simultanée

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que l'endormorphisme induit par un endormorphisme diagonalisable dans un sous-espace stable est diagonalisable.
2. Soit $A \subset \mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Montrer que les éléments de A admettent une base commune de diagonalisation.

---

1. Soit u un endomorphisme diagonalisable du K-espace vectoriel E. Il existe P polynôme de K[X], scindé à racines simples annulant u. Supposons que u laisse stable un sous-espace F. Alors P annule aussi $u_{|F}$ et $u_{|F}$ est diagonalisable.

2. La partie A engendre un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie. Il existe alors une famille $(u_1, ..., u_p)$ de A constituant une base de ce sous-espace. Si on trouve une base diagonalisant tous les éléments de cette famille, tout endomorphisme de A s'exprimant comme combinaison linéaire des u_i, sera diagonalisable dans cette base.

Montrons l'existence d'une base commune de diagonalisation des u_i par une récurrence sur $p \geq 1$. Pour le cas $p = 1$ c'est évident. Supposons $p \geq 2$ et le résultat vrai au rang (p-1). Comme u_p est diagonalisable, on peut écrire, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u_p,

$$E = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} Ker(u_p - \lambda_i Id)$$

Comme chaque u_j, pour $1 \leq j \leq p-1$, commute avec u_p, u_j laisse stable chaque sous-espace propre $Ker(u_p - \lambda_i Id)$. Notons u_{ji} l'endomorphisme induit par u_j sur $Ker(u_p - \lambda_i Id)$. A i fixé dans 1,2,...,k, les u_{ji} en tant que restrictions d'endomorphismes diagonalisables, sont eux-mêmes diagonalisables et commutent deux à deux. Il y en a (p-1) et ils sont donc justifiables de l'hypothèse de récurrence : il existe $\mathcal{B}_i$ base de $Ker(u_p \lambda_i Id)$ qui diagonalise chaque u_{ji}. La base $\mathcal{B}_i$ est donc constituée de vecteurs propres pour u_j ($j \in [\![1, p-1]\!]$), mais aussi pour u_p puisque les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont dans $Ker(u_p - \lambda_i Id)$. Comme E est somme directe des sous-espaces propres de u_p, ($\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$,...,$\mathcal{B}_k$) est une base de E constituée des vecteurs propres pour u_1,...,u_p : c'est une base commune de diagonalisation.

Autre méthode : Il est aussi possible de faire une récurrence forte sur la dimension de l'espace E. Si tous les éléments de A sont des homothéties, le résultat est instantanné. Sinon, on choisit un élément u de A qui n'est pas une homothétie. Les sous-espaces propres de u sont stables par tous les éléments de A et de dimension strictement inférieure à celle de E. Les endomorphismes induits par ces sous-espaces commutent deux à deux ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Extension : Il est aussi possible de montrer avec le même type de raisonnement par récurrence que sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, toute famille commutative d'endormorphismes de E admet un vecteur propre commun...

Matrices circulantes

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

de $M_n(\mathbb{C})$ (on les appelle *matrices circulantes*).

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont simultanément diagonalisables.
3. On remplace $\mathbb{C}$ par un corps K dans lequel $X^n - 1$ est scindé. Le résultat de la question 2 subsiste-t'il ? Discuter selon la caractéristique de K.

---

1. Chaque ligne d'une matrice de $\mathcal{A}$ s'obtient par permutation circulaire à partir de la précédente (d'où le nom de ces matrices). Soit :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $J = (m_{i,j})$ où $m_{i,j} = 1$ si $i \equiv j + 1[n]$ et $= 0$ sinon. C'est la *matrice de permutation associée au n-cycle (1,2,...,n)*. Cette interprétation de J rend facile (voir trivial) le calcul de ses puissances : J agit sur les vecteurs de la base canonique $(e_1,...,e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ en augmentant l'indice d'une unité (modulo n). On obtient alors facilement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k = (m^k_{i,j})$, où $m^k_{i,j} = 1$ si $i \equiv j + k[n]$ et $= 0$ sinon. On obtient en particulier $J^n = Id_n$.

Ainsi, une matrice $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{A}$ s'écrit tout simplement comme un polynôme en J : $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$. On en déduit que $\mathcal{A} = Vect(Id, J, ..., J^{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$. La famille $(Id, J, ..., J^{n-1})$ est libre donc $\mathcal{A}$ est de dimension n. Comme le produit de deux vecteurs de cette base appartient encore à la base et que ce produit est commutatif, par linéarité $\mathcal{A}$ est stable pour la multiplication et la multiplication est commutative dans $\mathcal{A}$. Enfin $\mathcal{A}$ contient la matrice Id_n, et est donc une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$.

2. Puisque $J^n = Id_n$, la matrice J possède un polynôme annulateur scindé à racines simples $X^n - 1$. Il existe donc D diagonale et P $\in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $J = PDP^{-1}$. On obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k = PD^kP^{-1}$ et avec les notations précédentes, pour $A \in \mathcal{A}$,

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = P(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k)P^{-1}$$

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$ est diagonale, toutes matrices de $\mathcal{A}$ sont diagonalisables dans la même base que J. Les valeurs propres de J étant les racine n-ième de l'unité, celles de A sont les $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k$, où $\omega \in U_n$.

3. Si K est un corps quelconque, on exprime de la même façon les matrices de $\mathcal{A}$ en fonction de J. On suppose $n \geq 2$ sinon toutes les matrices sont diagonales.

— Si K est de caractéristique nulle, le polynôme $P = X^n - 1$ est encore scindé à racines simples puisque $P' = nX^{n-1}$ a comme seule racine 0. Le résultat de la question 2 subsiste.

— Supposons que K soit de caractéristique p, nombre premier. Si p ne divise pas n, la seule racine de P' est encore 0 qui n'est pas racine de P. Le résultat subsiste toujours. Si p divise n, on pose n=pq. On a alors $X^n - 1 = X^{pq} - 1 = (X^q - 1)^p$, car pour $1 \leq k \leq p-1$, p divise C_p^k. Les valeurs propres de J sont des racines de $X^q - 1$. Si J est diagonalisable, on a $J^q = Id_n$. C'est manifestement faux : le plus petite entier pour lequel $J^k = Id_n$ est n. Donc J n'est pas diagonalisable et le résultat ne subsiste pas.

Remarque : On peut vérifier de suite que, pour toute racine n-ième de l'unité ω, le vecteur de coordonnées $(1, \omega, ...\omega^{n-1})$ est une base de la droite propre de J associée à la valeur propre ω.

Caractéristique d'un corps : Soit K un corps fini, 0_K et 1_K les éléments neutres additif et multiplicatif. On note $n.1_K$ le résultat de l'addition de 1_K itérée n fois. L'application correspondante est compatible avec l'addition et la multiplication (c'est l'unique morphisme d'anneaux (unitaires) de $\mathbb{Z}$ dans K). La caractéristique du corps K est le plus petit entier non nul p tel que $p.1_K = 0_K$ (un tel nombre existe car sinon, le groupe additif engendré par 1_K serait infini). De plus, p est un nombre premier. En effet, si a et b sont des entiers tels que $a.b = p$, alors $(a.1_K).(b.1_K) = (a.b).1_K = 0_K$. Comme K est un corps, $a.1_K$ ou $b.1_K$ est nul, et donc par définition de p, a ou b vaut p. On vérifie alors que l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans K qui à n associe $n.1_K$ induit une injection de $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ dans K, son image est un sous-corps de K isomorphe à $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$. Il est contenu dans tout sous corps de K (qui doit contenir 0_K et 1_K). C'est donc le plus petit sous-corps de K et on le nomme sous-corps premier de K. Pour la même raison c'est le seul sous-corps de K isomorphe à $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$, et on peut l'identifier à $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ $(= F_p)$.

Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. Montrer l'existence d'un unique couple (d,n) d'endormophismes de E tel que

1. u = d + n
2. d et n commutent
3. d est diagonalisable et n est nilpotent

On vérifiera en plus que d et n sont des polynômes en u.

Traitons d'abord l'existence du couple (d,n). Pour cela exprimons le polynôme caractéristique de u :

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1}...(X - \lambda_r)^{m_r}$$

avec les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et les entiers $m_i \geq 1$. Par le théorème de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, E s'écrit comme somme directe des sous-espaces caractéristiques $F_i = Ker(u - \lambda_i Id)^{m_i}$:

$$E = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$$

Soit d l'endomorphisme de E dont la restriction à chaque F_i est $\lambda_i Id_{F_i}$: autrement dit, d est diagonalisable et admet chaque sous-espaces F_i comme espace propre pour la valeur propre λ_i. Posons n=u-d. Il ne reste plus qu'à vérifier que n est nilpotent et commute avec d. Comme chaque sous-espace caractéristique de E est stable par u et par d (donc aussi par n), il suffit de vérifier pour les restrictions aux F_i. Notons avec un indice i les restrictions à F_i. On a $u_i = d_i + n_i$ et $d_i = \lambda_i Id_{F_i}$. Par définition de F_i, $(u_i - \lambda_i Id_{F_i})^{m_i} = 0$ donc n_i est nilpotent et commute clairement avec l'homothétie d_i. Le couple (d,n) convient.

Avant de prouver l'unicité, vérifions que d et n sont des polynômes de u. Cela se voit aisément dans la démonstration du théorème de décomposition des noyaux : pour tout i la projection π_i sur F_i parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques est un polynôme en u. Or, par construction, on a simplement pris

$$d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i \in \mathbb{C}[u]$$

Bien entendu, n=u-d est alors aussi dans $\mathbb{C}[u]$.

Supposons maintenant l'existence d'un autre couple (d',n') répondant au problème de la décomposition de Dunford. On a alors d'-d=n-n'. Comme d' commute avec n', il commute aussi avec u, donc avec tout polynôme en u. En particulier, d' commute avec d. Ainsi d et d' sont co-diagonalisables (confer l'exercice de diagonalisation simultanée) et donc d'-d est diagonalisable. De même, n commute avec n'. Il en découle que n-n' est nilpotent. Le seul endomorphisme diagonalisable **et** nilpotent étant 0 on a d=d' et n=n'.

Lemme des noyaux : Soient E un espace vectoriel sur un corps K et f un endormorphisme de E. Si $P_1, ..., P_n \in K[X]$ (avec n un entier strictement positif) sont premiers entre eux deux à deux, alors les sous-espaces vectoriels $V_i = Ker(P_i(f))$ (où $1 \leq i \leq n$) sont en somme directe et

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Ker(P_i(f)) = Ker((\prod_{i=1}^{n} P_i)(f))$$

De plus, la projection de la somme directe sur V_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} V_j$ est la restriction de $Q_i(f)$ pour un polynôme Q_i.

Démonstration. On montre d'abord par récurrence sur n que si le lemme est vrai pour n = 2, il est vrai pour tout n. Il n'y a rien à montrer pour le cas n = 1 (la projection mentionnée est l'identité, qui est Q(f) avec Q le polynôme constant 1). Si $n > 2$ on pose $Q = P_1 P_2 \cdots P_{n-1}$ alors $\prod_{i=1}^{n} P_i = QP_n$ et Q est premier avec P_n (car d'après le théorème de Bachet-Bézout pour les polynômes, chacun des facteurs P_i de Q est inversible modulo P_n, et leur produit Q l'est donc aussi). Alors le cas n = 2 dit que $Ker(QP_n)(f) = KerQ(f) \oplus KerP_n(f)$, avec les projections correspondantes données par des polynômes en l'endomorphisme f ; l'hypothèse de récurrence permet de décomposer ker Q(f) comme somme directe des ker P_i(f) pour i = 1,..., n − 1, et les projections de ker Q(f) sur ces facteurs se composent avec celle sur ker Q(f) pour donner des projections requises $Ker(QP_n)(f) \rightarrow KerP_i(f)$.

Traitons maintenant du cas où n=2. On voit sans problème que l'espace $V = Ker(P_1P_2)(f)$ contient les espaces $V_i = KerP_i(f)$ pour i = 1,2 et donc aussi leur somme ; il s'agit de montrer que la somme $V_1 + V_2$ est directe et égale à V tout entier (avec des projections polynômes en f). D'après le théroème de Bachet-Bézout, il existe $Q_1, Q_2 \in K[X]$ tel que $P_1Q_1 + P_2Q_2 = 1$, et par conséquent $(P_1Q_1 + P_2Q_2)(f) = Id_E$. Notons

$$\pi_i = (P_jQ_j)(f)|_V$$

donc $\pi_1 + \pi_2 = Id_V$ et $\pi_1(V_2) = \pi_2(V_1) = \{0\}$. Pour voir que la somme $V_1 + V_2$ est directe, on considère $x \in V_1 \cap V_2$. On a $x = \pi_1(x) + \pi_2(x) = 0$, et la somme est directe.

Pour voir que $V_1 + V_2 = V$, on considère $x \in V$. On a $x = \pi_1(x) + \pi_2(x)$ avec $\pi_1(x) \in V_1$ car

$$P_1(f)(\pi_1(x)) = (P_1P_2Q_2)(f)(x) = (Q_2P_1P_2)(f)(x) = Q_2(f)(0) = 0$$

et on a $\pi_2(x) \in V_2$ pour les des raisons similaires. On conclut que $v \in V_1 + V_2$ et donc $V = V_1 + V_2$.

Finalement, les projections de $V = V_! \oplus V_2$ sur les fqcteurs sont π_1 et π_2 : on a déjà vu que l'image de π_i est contenue dans V_i et qu'il s'annule sur l'autre facteur, donc il reste à voir que π_i est l'identité sur V_i. Pour $x = \pi_1(x) + \pi_2(x) = \pi_i(x)$, donc c'est vérifié. □

Théorème de Cayley et de Hamilton : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E. Soit

$$\chi_f(\lambda) = det(f - \lambda.Id)$$

le polynôme caractéristique de f. Alors l'endomorphisme $\chi_f(f)$ est nul.

Cette décomposition peut-être effectuée sur un corps quelconque K dès lors que le polynôme caractéristique de u est scindé sur K i.e. dès lors que u est trigonalisable. C'est une condition nécessaire puisque si u = d + n, d est diagonalisable, n nilpotente, nd = dn, alors d et n sont cotrigonalisables (confer l'exercice de trigonalisation simultanée), donc u est également trigonalisable.

A partir de la décomposition de Dunford, on est fondamentalement ramené à l'étude des classes de similitudes des matrices nilpotentes.

17.1.4 Trigonalisation

Equivalences de propriétés

Soient $n \in \mathbb{N}^n$, $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

— (i) A est nilpotente

— (ii) $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$

— (iii) $\chi_A = (-1)^n X^n$

— (iv) $A^n = 0$

(i) $\implies$ (ii) Supposons A nilpotente.

— Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0$; autrement dit, le polynôme X^N est annulateur de A. Il en résulte : $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$.

— Puisque $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ et $deg(\chi_A) \geq 1$, χ_A admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}$, donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

Finalement, $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$.

(ii) $\implies$ (iii) Si $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, que $\chi_A^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ et que χ_A est de degré n à coefficient dominant $(-1)^n$, on conclut : $\chi_A = (-1)^n X^n$.

(iii) $\implies$ (iv) Supposons $\chi_A = (-1)^n X^n$. Il existe $T \in T_{n,s}(\mathbb{C})$ telle que $A \sim T$, et on a donc

$$\chi_T = \chi_A = (-1)^n X^n$$

Les termes diagonaux de T sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & x & \dots & x \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Il est alors clair que :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \dots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, ..., T^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & K \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

$T^n = 0$ et donc $A^n = 0$.

(iv) $\implies$ (i) est évidente.

Sous-espaces stables dans $\mathbb{C}$ de dimensions différentes

Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, pour tout k de $\{0, ..., n\}$, il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension k et stable par f.

Il existe un base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) \in T_{n,s}(\mathbb{C})$, puisque f est trigonalisable. Il est clair alors que les sous-espaces vectoriels suivants de E sont stables par f et de dimension respectives 0,1,2,...,n :

$$\{0\}, Vect(e_1), Vect(e_1, e_2), ..., Vect(e_1, ..., e_k), ..., Vect(e_1, ..., e_n)$$

Trigonalisation simultanée

Soit A,B deux matrices de $M_n(\mathbb{C}$ qui commutent. Montrer que A et B possèdent un vecteur propre commun, puis établir qu'elles sont trigonalisables simultanément.

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de A qui est de degré $n \geq 1$ admet au moins une racine. Donc A admet au moins une valeur propre λ. L'espace propre $Ker(A - \lambda Id_n)$ est stable par B car A et B commutent. Le même argument montre que la restriction de B à cet espace propre admet une valeur propre μ. Si X est un vecteur propre associé on a alors BX = μX et AX= λX. Donc X répond au problème.

Montrons maintenant par récurrence sur n qu'il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $S^{-1}AS$ et $S^{-1}BS$ soient triangulaires supérieures. C'est évident si n=1. Supposons $n \geq 2$ et le résultat vrai au rang (n-1). D'après la première partie de l'exercice, il existe $e \in \mathbb{C}^n$ non nul et λ et μ complexes vérifiant $Ae = \lambda e$ et $e = \mu e$. Complétons e en une base $(e, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Si Q désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à $(e, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$, on a :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & x & \dots & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu & x & \dots & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Comme A et B commutent, il en va de même pour A' et B'. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $R \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ tel que les matrices

$R^{-1}A'R = T$ et $R^{-1}B'R = U$ soient triangulaires. Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Alors $P = GL_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$P^{-1}Q^{-1}AQP = \begin{pmatrix} \lambda & x & \dots & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1}A'R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x & \dots & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{C})$$

et de même

$$P^{-1}Q^{-1}BQP = \begin{pmatrix} \mu & x & \dots & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1}B'R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & x & \dots & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & U & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{C})$$

Comme $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$, la matrice inversible $S = QP$ convient.

Chapitre 18

Algèbre Bilinéaire

18.1 Exercices

Matrices congruentes

Dans $M_n(\mathbb{R})$, on définit la congruence de matrices de la manière suivante :

$$A\mathcal{C}B \iff (\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), B = {}^\top PAP)$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence dans $M_n(\mathbb{R})$. Quels liens y a-t'il entre congruence, équivalence et similitude ?
2. — A-t'on : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B, A', B' \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mathcal{C}B \\ A'\mathcal{C}B' \end{array} \right. \implies \alpha A + A'\mathcal{C}\alpha B + B' \,?$$

   — Montrer :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), (A\mathcal{C}B \implies {}^\top A\mathcal{C}{}^\top B)$$

3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), (A\mathcal{C}B \implies {}^\top MAM\mathcal{C}{}^\top MBM)$$

   La propriété subsiste-t'elle si on suppose seulement $M \in M_n(\mathbb{R})$?
4. Soient $A, B \in M_p(\mathbb{R}), A', B' \in M_q(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mathcal{C}B \\ A'\mathcal{C}B' \end{array} \right. \implies \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

5. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont congruentes si et seulement si elles représentent une même forme bilinéaire symétrique sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans deux bases.

1.

1.A

— Réflexivité : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), A\mathcal{C}A$, en choisissant $P = Id_n$.

— Symétrie : Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ tel qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = {}^\top PAP$. On a alors $A = ({}^\top P)^{-1}BP^{-1} = {}^\top(P^{-1})BP^{-1}$, donc $B\mathcal{C}A$.

— Transitivité : Soit $(A, B, C) \in (M_n(\mathbb{R}))^3$ tel que $A\mathcal{C}B$ et $B\mathcal{C}C$. Il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que : $B = {}^\top PAP$ et $C = {}^\top QBQ$. On a alors :

$$C = {}^\top Q({}^\top PAP)Q = {}^\top(PQ)A(PQ)$$

et $PQ \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $A\mathcal{C}C$.

Ainsi, $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence dans $M_n(\mathbb{R})$.

1.B

— Le lien entre équivalence et similitude a déjà été montré en MPSI (le retrouver au besoin) :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), (A \sim B \implies AeqB)$$

La réciproque est fausse.

— Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A\mathcal{C}B$; il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que : $B = {}^\top PAP$. Alors : $rg(B) = rg(A)$, donc $AeqB$.

— Il est clair que si $B = {}^\top PAP$ alors $det(B) = (det(P))^2.det(A)$, donc $signe(det(B)) = signe(det(A))$. En prenant $n = 1$, $A = (1)$, $B = (-1)$, il est clair que :

$$A \sim B \textbf{ ET } A \not\mathcal{C} B$$

— En prenant $n = 1, A = (1), B = (4)$, on a $A\mathcal{C}B$ (choisir $P = (2)$) ; on a alors $B = {}^\top PAP$ et $A \not\sim B$.

Réponse :

1. similitude $\implies$ équivalence
2. congruence $\implies$ équivalence
3. Il n'y a pas d'autre lien logique

2.

2.A Exemple : $n = 1, \alpha = 1, A(1), B = (4), A' = (-9), B' = (-1)$. On a ici : $A\mathcal{C}B, A'\mathcal{C}B'$, mais $\alpha A + A' \not\mathcal{C} \alpha B + B'$. **Réponse :** non.

2.B Si $B = {}^\top PAP$, alors ${}^\top B = {}^\top P {}^\top AP$.

3.

— Si $B = {}^{\top}PAP$, alors ${}^{\top}MBM = {}^{\top}M{}^{\top}PAPM = {}^{\top}(PM)A(PM)$ et $PM \in GL_n(\mathbb{R})$

— Exemple où $M \notin GL_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ici :

$$A\mathcal{C}B \text{ (choisir } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{)}, {}^{\top}MAM \not{\mathcal{C}}{}^{\top}MBM$$

(car ${}^{\top}MAM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^{\top}MBM = 0$).

Réponse : non.

4. S'il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$, $Q \in GL_q(\mathbb{R})$ telles que $A' = {}^{\top}PAP$ et $B' = {}^{\top}QBQ$, alors en notant $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, on a $R \in GL_{p+q}(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = {}^{\top}R \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} R$$

5. La propriété résulte trivialement de la formule de changement de base pour les formes bilinéaires symétriques.

Deux matrices A,B de $M_n(\mathbb{R})$ sont dites **équivalentes** (noté $AeqB$) si et seulement si :

$$\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R}), B = Q^{-1}AP$$

Deux matrices A,B de $M_n(\mathbb{R})$ sont dites **semblables** (noté $A \sim B$) si et seulement si :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), B = P^{-1}AP$$

Changement de base pour une forme bilinéaire symétrique – Soient φ une fbs sur ExE, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi)$, on a alors : $A' = {}^{\top}PAP$.

Démonstration. cf page 118 de *Algèbre et Géométrie...* □

Autour de la transposition

1. Soient n,p $\in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer :

$$^\top AA = 0 \implies A = 0$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^\top AA = A^\top A \text{ et } A^4 = 2A^2 - Id_n$$

Montrer que : $A^2 = Id_n$.

---

1. Comme $(X, Y) \mapsto tr(^\top XY)$ est un produit scalaire (*dit canonique*) sur $M_{p,n}(\mathbb{R})$:

$$^\top AA = 0 \implies tr(^\top AA) = 0 \implies A = 0$$

2. Notons $B = A^2 - Id_n$. On a alors :

$$B^2 = A^4 - 2A^2 + Id_n = 0$$

et

$$^\top BB = {}^\top A^2 A^2 - A^2 - {}^\top A^2 + Id_n = A^{2\top} A^2 - A^2 - {}^\top A^2 + Id_n = B^\top B$$

d'où

$$^\top(^\top BB)(^\top BB) = (^\top BB)^2 = {}^\top B^2 B^2 = 0$$

Donc, d'après la question précédente $^\top BB = 0$ donc $B = 0$.

Déterminant de Gram

Soient (E,(.—.)) un espace préhilbertien réel, ‖.‖ la norma associée. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_p) \in E^p$, on note :

$$\begin{cases} G(x_1, ..., x_p) & = ((x_i|x_j))_{1 \leq i,j \leq p} \in M_n(\mathbb{R}) \\ \gamma(x_1, ..., x_p) & = det(G(x_1, ..., x_p)) \end{cases}$$

appelés respectivement **matrice de Gram** et **déterminant de Gram** de la famille $(x_1, ..., x_p)$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de $X = Vect(x_1, ..., x_p)$. On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, ...x_p)$. Montrer : $G(x_1, ...x_p) = {}^\top AA$.
2. Etablir : $rg(G(x_1, ..., x_p)) = rg(x_1, ..., x_p)$.

3. Montrer :

$$\begin{cases} (x_1, ..., x_p) \text{ liée} & \Longleftrightarrow \quad \gamma(x_1, ..., x_p) = 0 \\ (x_1, ..., x_p) \text{ libre} & \Longleftrightarrow \quad \gamma(x_1, ..., x_p) > 0 \end{cases}$$

---

1. L'espace vectoriel euclidien X admet au moins une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$. En notant, $A = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, ...x_p) = (a_{ij})_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall j \in \{1, ..., p\}, x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$$

donc, puisque $\mathcal{B}$ est orthonormale :

$$\forall (i, j) \in \{1, ..., p\}^2, (x_i | x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

Il en résulte : $G(x_1, ..., x_p) = {}^\top AA$.

2.

— Soit $Y \in Im({}^\top AA)$. Il existe $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = ({}^\top AA)X$. On a alors : $Y = {}^\top A(AX) \in Im({}^\top A)$. Ceci montre : $Im({}^\top AA) \subset Im({}^\top A)$, et donc, en passant aux dimensions :

$$rg({}^\top AA) \leq rg({}^\top A) = rg(A)$$

— Soit $X \in Ker({}^\top AA)$. On a alors $({}^\top AA)X = 0$, donc :

$$\|AX\|_2^2 = {}^\top (AX)(AX) = {}^\top X({}^\top AAX) = 0$$

donc $AX = 0$, $X \in Ker(A)$. Ceci montre : $Ker({}^\top AA) \subset Ker(A)$, et donc, en passant aux dimensions :

$$dim(Ker({}^\top AA)) \leq dim(Ker(A))$$

Il en résulte, en utilisant le théorème du rang :

$$rg({}^\top AA) = p - dim(Ker({}^\top AA)) \geq p - dim(Ker(A)) = rg(A)$$

Finalement, $rg({}^\top AA) = rg(A)$. Et donc, d'après la question 1, on peut conclure : $rg(G(x_1, ..., x_p)) = rg(x_1, ..., x_p)$.

3.

— D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_p) \text{ liée} \quad & \Longleftrightarrow \quad rg(A) < p \\ & \Longleftrightarrow \quad rg(G(x_1, ..., x_p)) < p \\ & \Longleftrightarrow \quad \gamma(x_1, ..., x_p) = 0 \end{aligned}$$

Attention : ne pas développer $det({}^\top AA)$ en $det({}^\top A).det(A)$ qui n'est pas défini puisque A est **rectangulaire**.

— Si $(x_1, ..., x_p)$ est libre, alors, avec les notations de la première question, $p = n$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, donc :

$\gamma(x_1, ...x_p) = det(^\top AA) = det(^\top A).det(A) = (det(A))^2 > 0$ matrices carrées ici

Réciproquement, si $\gamma(x_1, ..., x_p) > 0$, alors $(x_1, ..., x_p)$ n'est pas liée, donc est libre. On peut donc conclure.

Orthogonalité − 1

Soient (E,(.—.)), un espace préhilbertien réel, $\|.\|$ la norme associée, F un sev de E, $x \in E$. Montrer :

$$x \in F^\perp \iff (\forall y \in F, (x|y) \leq \|y\|^2)$$

— $\implies$: évident

— Réciproquement, supposons : $\forall y \in F, (x|y) \leq \|y\|^2$. Soit $y \in F$, on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (x|\lambda y) \leq \|\lambda y\|^2$, d'où :

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, & (x|y) \leq \lambda.\|y\|^2 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_-^*, & (x|y) \geq \lambda.\|y\|^2 \end{cases}$$

En faisant tendre λ vers 0^+, 0^-, on déduit : $(x|y) = 0$.

Orthogonalité − 2

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Quels sont les orthogonaux de $D_n(\mathbb{R})$, $S_n(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R})$?

---

1. $$\begin{aligned} A = (a_{ij})_{ij} \in (D_n(\mathbb{R}))^\perp &\iff (\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, tr(^\top A diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)) = 0) \\ &\iff (\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \textstyle\sum_{i=1}^n a_{ii}\lambda_i = 0) \\ &\iff (\forall i \in \{1, ..., n\}, a_{ii} = 0 \end{aligned}$$

2. Soient $S \in S_n(\mathbb{R}), A \in A_n(\mathbb{R})$. On a :

   $< S, A >= tr(^\top SA) = tr(^\top(^\top SA)) = tr(^\top AS) = tr(-AS) = -tr(A^\top S) = -< S, A >$

   d'où $< S, A >= 0$. Ceci montre :

   $$S_n(\mathbb{R}) \subset (A_n(\mathbb{R}))^\perp \text{ et } A_n(\mathbb{R}) \subset (S_n(\mathbb{R}))^\perp$$

   De plus,

   $$dim((A_n(\mathbb{R}))^\perp) = n^2 - dim(A_n(\mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = dim(S_n(\mathbb{R}))$$

Réponse :

— $(D_n(\mathbb{R}))^\perp = \{A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R}); \forall i \in \{1, ..., n\}, a_{ii} = 0\}$

— $(S_n(\mathbb{R}))^\perp = A_n(\mathbb{R})$

— $(A_n(\mathbb{R}))^\perp = S_n(\mathbb{R})$

Commutant des matrices anti-symétriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le commutant de $A_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$\{M \in M_n(\mathbb{R}); \forall A \in A_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

— Supposons $n \geq 3$, et $M = (m_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall A \in A_n(\mathbb{R}), AM = MA$$

Soit $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $i \neq j$; il existe $k \in \{1, ..., n\}$ tel que i,j,k soient deux à deux distincts. Comme $E_{jk} - E_{kj} \in A_n(\mathbb{R})$, on a :

$$(E_{jk} - E_{kj})M = M(E_{jk} - E_{kj})$$

d'où, en prenant les $(i, k)^{\text{ièmes}}$ termes : $0 = -m_{ij}$. On montrera de même assez aisément que $m_{ii} = m_{jj}$. La réciproque est bien sûr immédiate.

— On traitera séparément le cas $n = 2$.

Réponse : Le commutant de $A_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est :

$$\left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}.Id_n & \text{si } n \neq 2 \\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{si } n = 2 \end{array} \right.$$

Rappelons que E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i-iéme ligne et la j-iéme colonne.

Distance à un sous-espace de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$

Evaluer

$$\inf_{(a_1,...,a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x}.(1 + a_1 x + ... + a_n x^n)^2 \mathrm{dx}$$

On définit un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$ en posant pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$

$$< P|Q >= \int_0^{+\infty} e^{-x}P(x)Q(x)\mathrm{dx}$$

L'expression que l'on cherche à minimiser est égale à $\|1 + P\|^2$ où $P = \sum_{i=1}^n a_iX^i$: c'est le carré de la distance entre P et -1. Quand les a_i varient dans $\mathbb{R}$, P décrit le sous-espace $E = Vect(X, X^2, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}[X]$ qui est de dimension finie. Il en résulte que la distance entre P et -1 possède un minimum, atteint pour un unique polynôme, à savoir le projeté orthogonal de -1 sur E. Ce projeté que nous appelerons toujours P, est caractérisé par le fait que $< P + 1|X^k >= 0$ pour tous $k \in [\![1, n]\!]$. Calculons ces produits scalaires :

$$< P + 1|X^k >= \int_0^{+\infty} e^{-x}.(x^k + \sum_{i=1}^n a_ix^{k+i})\mathrm{dx}$$

On vérifie aisément que, pour tout entier n, $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\mathrm{dx} = n!$ (en utilisant ses connaissances sur la fonction Gamma d'Euler bien connue, ou plus prosaïquement à l'aide d'une récurrence et d'une intégration par partie). On a donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $k! + \sum_{i=1}^n a_i(k + i)! = 0$, ce qui peut s'écrire en divisant par $k!$

$$1 + \sum_{i=1}^n a_i(k + 1)(k + 2)...(k + i) = 0$$

On va voir qu'il n'est pas indespensable d'utiliser P, c'est-à-dire de résoudre ce système linéaire pour touver la distance entre P et -1. En effet, le minimum cherché vaut

$$\begin{aligned} \|P + 1\|^2 &=< P + 1|P + 1 > \\ &=< P + 1|1 > \\ &= \textstyle\int_0^{+\infty} e^{-x}.(1 + a_1X + ... + a_nX^n)\mathrm{dx} \\ &= 1 + \textstyle\sum_{i=1}^n a_ii! \end{aligned}$$

puisque P+1 est orthogonal à P.

Considérons alors le polynôme $Q = 1 + \sum_{i=1}^n a_i(X + 1)(X + 2)...(X + i)$. Il est de degré inférieur ou égal à n, le coefficient de X^n étant a_n. Il s'agit de calculer $Q(0)$. Or les relations d'orthogonialité qui définissent P s'écrivent : $Q(1) = ... = Q(n) = 0$. On a donc $Q = a_n(X - 1)...(X - n)$ et $Q(0) = a_n.(-1)^n.n!$; on remarque de plus que $Q(-1) = 1$, c'est-à-dire, $a_n(-1)^n(n + 1)! = 1$, ainsi $(-1)^n.a_n = \frac{1}{(n+1)!}$ et finalement $Q(0) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$. Le minimum recherché vaut donc

$$\boxed{\frac{1}{n+1}}$$

Distance d'une matrice à l'espace des matrices symétriques
Soit S l'espace des matrices symétriques réelles de taille n et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\underset{M=(m_{ij})\in S}{inf} \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

Il s'agit de déterminer $\underset{M\in S}{inf} \|A - M\|^2$ pour la structure euclidienne canonique de $M_n(\mathbb{R})$, autrement dit le carré de la matrice A au sous-espace S. Nous savons que si H désigne le projeté orthogonal de A sur S, alors on

$$\|A - H\|^2 = \underset{M\in S}{inf} \|A - M\|^2$$

Cette borne inférieure, que nous noterons $d(A, S)^2$, est atteinte en H (et c'est d'ailleurs le seul point où elle est atteinte).

Nous savons que si $\mathfrak{A}$ désigne le sous-espace des matrices anti-symétriques réelles de taille n, alors $S \oplus \mathfrak{A} = M_n(\mathbb{R})$. En fait, S et $\mathfrak{A}$ sont supplémentaires orthogonaux, car si $M \in S$ et $N \in \mathfrak{A}$ on a

$$\begin{aligned} < M|N > &= Tr(^\top MN) = Tr(MN) = Tr(M(-^\top N)) = -Tr(M^\top N) \\ &= -Tr(^\top NM) = - < N|M > \\ &= - < M|N > \end{aligned}$$

D'où $< M|N >= 0$. Ainsi, on a bien $M_n(\mathbb{R}) = S \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{A}$ et donc $H = \frac{A+^\top A}{2}$ et $A - H = \frac{A-^\top A}{2}$. Il en résulte que

$$\boxed{d(A, S)^2 = \frac{1}{4} \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2}$$

Remarque : Notons qu'il est possible de résoudre cet exercice simplement sans introduire le formalisme ci-dessus puisqu'on peut simplement à minimiser le trinôme $(x - a_{ij})^2 + (x - a_{ji})^2$ pour $i \neq j$.

Norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$
On pose $N(A) = \sqrt{Tr(^\top AA)}$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que N est une norme
2. Montrer que $|Tr(A)| \leq \sqrt{n}.N(A)$
3. Montrer que si $O \in O_n(\mathbb{R})$, on a $N(AO) = N(OA) = N(A)$

4. Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$
5. Comparer N avec d'autres normes de $M_n(\mathbb{R})$

---

1. Il suffit d'observer que $\Phi : (A, B) \mapsto Tr({}^\top AB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ (N est la norme euclidienne associée) ; la démonstration de cet état de produit scalaire est très simple...

2. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire introduit à la question précédente.

$$|Tr(A)| = |Tr(Id_n A)| \leq N(Id_n).N(A) = \sqrt{n}.N(A)$$

Comme il y a égalité pour $A = Id_n$, on en déduit que la triple norme de la forme linéaire $Tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est égale à $\sqrt{n}$.

3. Pour $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$Tr({}^\top(AO)(AO)) = Tr({}^\top A {}^\top OOA) = Tr({}^\top AA)$$

et donc $N(AO) = N(A)$. De même on a

$$Tr({}^\top(AO)(AO)) = Tr({}^\top O {}^\top AAO) = Tr({}^\top AAO {}^\top O) = Tr({}^\top AA)$$

et donc $N(AO) = N(A)$.

4. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $C = AB$ avec $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et il vient

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \textstyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij}^2 = \sum_{i,j} (\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})^2 \\ &\leq \textstyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{l=1}^n b_{lj}^2) \text{ inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \textstyle(\sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{ik}^2)(\sum_{1 \leq j,l \leq n} b_{lj}^2) = N(A)^2.N(B)^2 \end{aligned}$$

La norme N est donc une norme d'algèbre.

5. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ posons $\|A\|_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq} |a_{ij}|$ ainsi que $\|A\|_\infty = \underset{1 \leq i,j \leq n}{max} |a_{ij}|$. On définit ainsi deux normes sur $M_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|A\|_\infty \leq N(A) \leq n.\|A\|_\infty$$

et les constantes sont optimales. On a aussi

$$N(A) \leq \|A\|_1 \leq n.N(A)$$

avec des constantes également optimales.

Il est important de retenir que le produit scalaire canonique de $M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire à l'aide de la trace :

$$< M|N >= \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}n_{ij} = Tr({}^{\top}MN)$$

La norme euclidienne associée est

$$\|M\| = \sqrt{Tr({}^{\top}MM)}$$

Commutant du groupe orthogonal

Déterminer le commutant de $O_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$\{M \in M_n(\mathbb{R}), \forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), M\Omega = \Omega M\}$$

---

1. Soit $M = (m_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), M\Omega = \Omega M$$

— Soient $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$,

$$\Omega = diag(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in O_n(\mathbb{R})$$

On a : $\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2, m_{ij}\epsilon_j = \epsilon_i m_{ij}$. Supposons $i \neq j$, on peut choisir $\epsilon_i = 1, \epsilon_j = -1$, d'où $m_{ij} = 0$. Ceci montre : $M = diag(m_{11}, ..., m_{nn})$.

— Soit $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $i < j$. En utilisant $\Omega = Id_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ji} - E_{ij} \in O_n(\mathbb{R})$, on obtient $m_{ii} = m_{jj}$.

Ainsi, $M \in \mathbb{R}.Id_n$.

2. Réciproque évidente.

Réponse : Le commutant de $O_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}.Id_n$.

Une CNS de diagonalisabilité dans le groupe orthogonal

Soient $(E, < .|. >)$ un espace vectoriel euclidien, $f \in O_n(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

---

1. Confer le cours *i.e.* les rappels ci-dessous ☺

2. Réciproquement, supposons $f \in O(E)$ diagonalisable. Comme $f \in O(E)$, on a : $Sp_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$. Il existe donc une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) \begin{pmatrix} Id_p & 0 \\ 0 & -Id_q \end{pmatrix}, \text{où } (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

On a alors $f^2 = Id$, donc f est une symétrie.

Soient $x \in Ker(f - Id)$, $y \in Ker(f + Id)$, on a

$$< x, y > = < f(x), f(y) > = < x, -y > = - < x, y >$$

d'où $< x, y > = 0$.

Finalement, f est une symétrie orthogonale.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **symétrique** (ou auto-adjoint) si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, < f(x), y > = < x, f(y) >$$

Pour tout sev F de E, on appelle **orthoprojecteur** (ou projecteur orthogonal) sur F, et on note p_F le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Pour $x \in E$, $p_F(x)$ s'appelle le projeté orthogonal de x sur F. On a donc :

$$\begin{cases} p_F \circ p_F = p_F \ , \ Im(p_F) = F \ , \ Ker(p_F) = F^{\perp} \\ \forall x \in E, (p_F(x) \in F, x - p_F(x) \in F^{\perp}) \end{cases}$$

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$). Alors p est un orthoprojecteur si et seulement si p est symétrique. (*)

Pour tout sev F de E, on appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** l'endomorphisme s_F de E défini par $s_F = 2.p_F - e$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F, et $e = Id_E$.

Il est clair que :

— $s_F \circ s_F = e$

— $Ker(s_F - e) = F$ et $Ker(s_F + e) = F^{\perp}$

— $p_F = \frac{1}{2}(e + s_F)$

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie ($s \circ s = e$). Alors, s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est symétrique.

Démonstration. Notons $p = \frac{1}{2}(e+s)$. Comme $Ker(p) = Ker(s+e)$ et $Im(p) = Im(s-e)$ (car $x = p(x) \iff s(x) = x$), on a schématiquement, en utilisant la proposition (*) :

$$\begin{array}{llll} & \text{s sym ortho} & \iff & \text{p proj ortho} \\ \iff & \text{p symétrique} & \iff & \text{s symétrique} \end{array}$$

□

Soit s une symétrie orthogonale de E. Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que

$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} Id_u & 0 \\ 0 & -Id_v \end{pmatrix}$$

avec $u = dim(Ker(s-e))$ et $v = dim(Ker(s+e))$.

Diamètre du groupe orthogonal réel

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est borné et calculer son diamètre.

---

1. Soit $\Omega = (a_{ij})_{ij} \in O_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\|\Omega\|^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné, et de plus :

$$\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), \|\Omega\| = \sqrt{n}$$

2.

— $\forall \Omega_1, \Omega_2 \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\|\Omega_1 - \Omega_2\| \le \|\Omega_1\| + \|\Omega_2\| = 2\sqrt{n}$$

— $Id_n \in O_n(\mathbb{R})$, $-Id_n \in O_n(\mathbb{R})$, $\|Id_n - (-Id_n)\| = 2\sqrt{n}$.

Réponse : $diam(O_n(\mathbb{R})) = 2\sqrt{n}$.

Convergence en moyenne arithmétique des puissances d'une matrice orthogonale

Soit $M \in O_p(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale réelle. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M^k$$

Posons $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^k$, pour tout entier naturel non nul n. Remarquons qu'un point fixe de M est encore fixe pour A_n. Ainsi, si $X \in Ker(M - Id_p)$ alors $MX = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_nX = X$. La suite $(A_nX)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers X.

Montrons que $\mathbb{R}^p = Ker(M - Id_p) \overset{\perp}{\oplus} Im(M - Id_p)$. Il suffit de démontrer que les deux espaces sont orthogonaux. Pour $X \in Ker(M - Id_p)$ et $Y = MZ - Z$, on a

$$^\top XY = {}^\top XMZ - {}^\top XZ = {}^\top(MX)MZ - {}^\top XZ = \top X^\top MMZ - \top XZ = 0$$

Regardons ce qui se passe sur $Im(M - Id_p)$. Si $X \in Im(M - Id_p)$, il existe $Y \in \mathbb{R}^p$ tel que $X = MY - Y$. Alors pour tout entier $n \geq 1$,

$$A_nX = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^kX = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(M^{k+1}Y - M^kY) = \frac{1}{n}(M^nY - Y)$$

On en déduit que $\|A_nX\| \leq \frac{1}{n}(\|M^nY\| + \|Y\|) \leq \frac{2}{n}\|Y\|$, car M est orthogonale. La suite $(A_nX)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^p$ qui s'écrit $Y + Z$ avec $Y \in Ker(M - Id_p)$ et $Z \in Im(M - Id_p)$, la suite $(A_nZ)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers Y. Ainsi la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice de la projection orthogonale sur $Ker(M - Id_p)$.

Une matrice orthogonale

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$. Montrer que la matrice $A = Id_n - 2U^\top U$ de $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale. Et identifier l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit.

L'hypothèse de l'énoncé s'écrit : $^\top UU = 1$. La matrice A est évidemment symétrique donc

$$A^\top A = A^2 = Id_n + 4U^\top UU^\top U - 4U^\top U = Id_n + 4U({}^\top UU)^\top U - 4U^\top U = Id_n$$

d'après la remarque initiale. Ainsi A est orthogonale. Comme $A^2 = Id_n$ c'est la matrice d'une symétrie orthogonale. Si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et est orthogonal à U alors $^\top UX = 0$ et il vient $AX = X$; d'autre part, on a $AU = U - 2U({}^\top UU) = -U$. La matrice est donc la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à U.

En plus : notons que $-A = 2U^\top U - Id_n$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}U$. Quant à $U^\top U$ c'est la matrice du projecteur orthogonal sur la droite $\mathbb{R}U$.

Une équation fonctionnelle faisant intervenir le groupe orthogonal

Déterminer les application $f : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall O \in O_n(\mathbb{R}), f(OX) = Of(X)^\top O$$

Analyse – Soit X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Pour obtenir des informations sur la matrice $f(X)$, il est naturel de considérer les matrices orthogonales O telles que $OX = X$. On identifie les matrices et les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qu'elles représentent dans la base canonique. Considérons O_1 la matrice orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}X$. On a $f(O_1X) = f(X) = O_1f(X)^\top O_1$ et $f(X)O_1 = O_1f(X)$: les endomorphismes $f(X)$ et O_1 commutent et donc les sous-espaces propres $Ker(O_1 - Id_n)$ et $Ker(O_1 + Id_n)$ sont stables par $f(X)$. Il en résulte que X est un vecteur propre de $f(X)$ et que l'hyperplan $H = X^\perp$ est stable par $f(X)$.

Prenons maintenant $Y \in H$ non nul et notons O_2 la reflexion par rapport à l'orthogonal de Y. Comme X est orthogonal à Y, on a $O_2X = X$ et donc $f(X) = O_2F(X)^\top)_2$ et finalement $f(X)O_2 = O_2f(X)$. Comme précédemment, $f(X)$ laisse stable $Ker(O_2 + Id_n) = \mathbb{R}Y$. Ainsi les vecteurs non nuls de H sont tous vecteurs propres de l'endomorphisme induit par $f(X)$ sur H. Il est classique d'en déduire que $f(X)$ réduite à H est une homothétie.

Ainsi on peut écrire $f(X)$ sous la forme $f(X) = a(X).p_X + b(X)Id_n$ où p_X désigne la matrice du projecteur orthogonal sur la droite $\mathbb{R}X$ et où $a(X)$ et $b(X)$ sont deux réels a priori indépendants de X.

Pour le vecteur nul, on voit comme ci-dessus que la matrice $f(0)$ commute avec $O_n(\mathbb{R})$: c'est donc une homothétie aussi et l'écriture précédente reste correcte.

Synthèse – Regardons maintenant si ces applications conviennent. Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $O \in O_n(\mathbb{R})$, on a

$$f(OX) = a(OX).p_{OX} + b(OX).Id_n$$

et

$$Of(X)O^{-1} = a(X).Op_XO^{-1} + b(X).Id_n$$

On a bien $Op_XO^{-1} = p_{OX}$. Si X est nul, l'égalité est vérifiée. Supposons X non nul, alors la famille (p_{OX}, Id_n) est libre et il y a égalité si et seulement si $a(OX) = a(X)$ et $b(OX) = b(X)$. Si X est un vecteur fixé, l'ensemble $\{OX, O \in O_n(\mathbb{R})\}$ est la sphère de centre 0 et de rayon $\|X\|$. Il en résulte que f convient si et seulement les fonctions a et b ne dépendent que de la norme euclidienne de X.

Conclusion : Les solutions sont les applications de la forme

$$X \mapsto \lambda(\|X\|).p_X + \mu(\|X\|).Id_n$$

où λ et μ sont des applications quelconques de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Une propriété des projecteurs

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^\top A = A$ et $A^2 = A$. Que peut-on dire de la nature géométrique de A ? Montrer que

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n.\sqrt{rg(A)}$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et exprimer $Tr({}^\top A.A)$...

Pour commencer, il est évident que la matrice A est la matrice d'un projecteur car $A^2 = A$, de plus la matrice A est symétrique. Exprimons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz entre la matrice A et la matrice U telle que $\forall i,j \in [\![1,n[\![, u_{ij} = 1$ (avec le produit scalaire canonique $< A|B >= Tr({}^\top A.B)$) :

$$\begin{array}{ll} < A|U >^2 & \leq \|A\|^2.\|U\|^2 \\ (\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|)^2 & \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2.\sum_{1\leq i,j\leq n} 1 \end{array}$$

Or $\|A\|^2 = Tr({}^\top A.A) = Tr(A.A) = Tr(A)$ et de plus comme A est un projecteur, on a $Tr(A) = rg(A)$. Ainsi, il vient

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n.\sqrt{rg(A)}$$

Caractérisation des projections orthogonales

Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que la projection p est orthogonale si et seulement si

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

($\rightarrow$) Si p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F alors
$$\forall x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$$
avec $p(x) \perp (x - p(x))$. Par le théorème de Pythagore
$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

($\leftarrow$) Inversement, soit p une projection telle que
$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Puisque p est une projection, les espaces $F = Im(p)$ et $G = Ker(p)$ sont supplémentaires et p est la projection sur F parallèlement à G. Il s'agit alors de montrer que ces deux espaces othogonaux. Soient $u \in F$, $v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons les vecteurs
$$x = u + \lambda.v$$
On a $p(x) = u$ et $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ ce qui donne
$$0 \leq 2\lambda < u|v > +\lambda^2\|v\|^2$$

Ceci valant pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $< u|v >= 0$. En effet, si $< u|v >\neq 0$ alors
$$2\lambda < u|v > +\lambda^2\|v\|^2 \underset{\lambda\to 0}{\sim} 2\lambda < u|v >$$

ce qui est une expression qui change de signe. Ainsi les espace F et G sont orthogonaux et p est une projection orthogonale.

Famille obtusangle

Soit $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il est impossible que
$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+2, < x_i|x_j >< 0$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour n=1 soit u un vecteur unitaire de E. On peut écrire $x_1 = \lambda_1.u$, $x_2 = \lambda_2.u$ et $x_3 = \lambda_3.u$. On a alors $< x_1|x_2 >= \lambda_1.\lambda_2$, $< x_3|x_2 >= \lambda_3.\lambda_2$ et $< x_1|x_3 >= \lambda_1.\lambda_3$. Ces trois quantités ne peuvent être négatives car
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_2\lambda_3\lambda_3\lambda_1 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 \geq 0$$

Supposons la propriété établie au rang (n-1). Par l'absurde supposons que la configuration soit possible, nécessairement $x_{n+2} \neq 0$. Posons $F = Vect(x_{n+2})^{\perp}$. On a $dim(F) = n - 1$.

$$\forall 1 \leq i \leq n+1, x_i = y_i + \lambda_i.x_{n+2}$$

avec $y_i \in F$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Comme $< x_i | x_{n+2} >< 0$, on a $\lambda_i < 0$.

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+1, < x_i | x_j >=< y_i | y_j > + \lambda_i \lambda_j \|x_{n+2}\|^2 < 0$$

donc $< y_i | y_j >< 0$. Contradiction

Donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(y_1, ..., y_{n+1})$ formée de vecteurs qui évoluent dans F. Récurrence établie.

Une recherche d'isométrie vectorielle

Soient u et v deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien orienté. Quelles sont les isométries vectorielles qui envoient u sur v ?

Il existe une seule rotation (*et non deux*) qui envoie u sur v, celle d'angle (u,v). Reste à déterminer les reflexions qui échangent u et v. Soit s une telle reflexion.

— Si $u = v$ alors s est la reflexion par rapport à $Vect(u)$

— Si $u \neq v$ alors s est la reflecion par rapport à $Vect(u - v)^{\perp}$

Caractérisation d'une application en dimension 3

Soit E un espace euclidien de dimension 3, $r \in SO(E)$, et s une symétrie orthogonale. Caractériser l'application $s \circ r \circ s$.

---

r est une rotation, définissons D son axe (droite vectorielle orientée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$) et θ son angle. Dans une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de E, la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Pour $x \in E$,

$$(s \circ r \circ s)(s(x)) = s(r(x))$$

Dans la base orthonormée $((\overrightarrow{u}), s(\overrightarrow{v}), s(\overrightarrow{w}))$ de E, un calcul direct donne que la matrice de $s \circ r \circ s$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

— Si $det(s) = 1$, la famille $s((\overrightarrow{u}), s(\overrightarrow{v}), s(\overrightarrow{w}))$ est directe et $s \circ r \circ s$ est la rotation d'axe dirigé et orienté par $s(\overrightarrow{u})$ et d'angle θ.

— Si $det(s) = -1$, la famille $s((\overrightarrow{u}), s(\overrightarrow{v}), s(\overrightarrow{w}))$ est indirecte et $s \circ r \circ s$ est la rotation d'axe dirigé et orienté par$s(\overrightarrow{u})$ et d'angle $-\theta$.

Autour du produit vectoriel en dimension 3

Soit a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3. On pose $f : E \to E$ définie par $f(x) = < x|a > a + a \wedge x$. Montrer que $f \in O(E)$ et préciser géométriquement f.

$\|f(x)\|^2 = < x|a >^2 + \|a \wedge x\|^2 = \|x\|^2$ car $\|a\| = 1$ donc $f \in O(E)$.

— Si $f(x) = x$ alors $a \wedge (< x|a > a + a \wedge x) = a \wedge x$ conduit à $a \wedge x = 0$ puis $x \in Vect(a)$.

— Inversement, si $x \in Vect(a)$ alors $f(x) = x$.

f est une rotation autour de $D = Vect(a)$. Orientons D par a. Pour $x \in \{a\}^{\perp}$, on a $f(x) = a \wedge x = Rot_{\frac{\pi}{2}}(x)$.

Finalement, f est la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Chapitre 19

Algèbre Sesquilinéaire

Troisième partie

Probabilités

Le programme distingue les *Univers Finis* des *Univers Infinis Dénombrables* vus respectivement en première et seconde année de classe préparatoire. Pour le moment, ne khôllant qu'en seconde année, tout est mélangé joyeusement. ☺

Chapitre 20

Dénombrement

20.1 Applications triviales

1 – Soient n,p deux entiers naturels. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$?

Cela revient à vouloir mettre $(p-n)$ billes dans $(n+1)$ trous. Or pour mettre N objets dans g trous, il y a $\frac{(N+g-1)!}{N!(g-1)!}$ solutions. Le résultat est : $\frac{p!}{(p-n)!n!}$.

---

2 – Combien y a t'il de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

Pour qu'une application $f : [\![1,n+1]\!] \to [\![1,n]\!]$ soit surjective, il faut qu'un et un seul élément de $[\![1,n]\!]$ ait deux antécédents, et que tous les autres n'en aient qu'un seul. Il y a donc :

$$C_{n+1}^2 \text{ x } n \text{ x } (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

possibilités.

---

3 – On considère un polygône (convexe) à n sommets. Combien a t'il de diagonales ? En combien de points (intérieurs ou extérieurs au polygône) ces diagonales se coupent-elles ?

Il y a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Et si on ne compte pas les sommets, elles se coupent en

$$\frac{1}{2}\frac{n(n-3)}{2}(\frac{n(n-3)}{2}-2(n-4)-1)=\frac{n(n-3)(n^2-7n-14)}{8}$$

Chapitre 21

Dénombrabilité et Tribus

21.1 Notions importantes

Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : *on peut le montrer en utilisant le procédé de diagonalisatioon de Cantor.*

Définition : Soit X un ensemble. On appelle **tribu** (ou σ-algèbre) sur X, un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X qui vérifie :

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset$
2. $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire.
3. $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

21.2 Exercices

L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable

Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On va démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et Ω. Soit f une telle bijection. Puisque f(n) est une suite de 0 et de !, on peut la noter $((f(n))_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $(f(n))_n$ désigne le n-ième terme de cette suite. On définit la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = 1 - (f(n))_n$$

En considérant l'antéceedetn de $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par f, obtenir une contradiction et conclure.

Notons m l'antécédent de $\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par f. Que peut-on dire de $(f(m))_m$? D'après la définition de ω, on doit avoir $\omega_m = 1-(f(m))_m$. D'après la définition de m on a aussi $\omega_m = (f(m))_m$. Ainsi, $((f(m))_m = 1-(f(m))_m$. C'est impossible, puisque $(f(m))_m \in \{0,1\}$.

Ainsi, une telle suite ne peut être définie, ce qui prouve que f n'existe pas et donc que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Toutefois, il existe une bijection entre Ω et $\mathbb{R}$: Ω est un ensemble infini ayant le même cardinal que $\mathbb{R}$.

Tribu − 1

On considère l'ensemble $\Omega = \{a,b,c\}$.

1. Donner la plus petite tribu contenant $\{a\}$.
2. Donner la plus petite tribu contenant $\{a\}$ et $\{b\}$.

---

1. Toute tribu doit au moins contenir Ω et $\emptyset$. Elle doit être stable par passage au complémentaire, ce qui impose ici que $\overline{\{a\}} = \{b,c\}$ est dans la tribu. Enfin, la tribu doit être stable par union dénombrable (ici, les unions sont finies). Donc on trouve que la tribu contient au moins

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \Omega\}$$

Mais cet ensemble est précisément une tribu : c'est donc la plus petite tribu contenant $\{a\}$.

2. Cette tribu doit contenir $\{c\} = \overline{\{a\} \cup \{b\}}$. Comme elle contient les trois singletons, on trouve rapidement que cette tribu est $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$.

Tribu − 2

Soient Ω un ensemble quelconque, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et B un sous-ensemble de Ω. On définit $\mathcal{T}'$ par $\mathcal{T}' = \{A\cap B \text{ avec } A \in \mathcal{T}\}$. Montrer que $\mathcal{T}'$ est une tribu sur B.

Vérifions les trois axiomes de tribus :

— Puisque $\emptyset \in \mathcal{T}$, on a bien $\emptyset = \emptyset \cap B \in \mathcal{T}'$

— Soit $A' \in \mathcal{T}'$. Alors A' peut s'écrire $A' = A\cap B$ avec $A \in \mathcal{T}$. Le complémentaire de A' dans B est

$$\overline{A'}|_B = \overline{A}\cap B = \overline{(A\cap B)}\cap B = (\overline{A}\cup\overline{B})\cap B = (\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap B) = \overline{A}\cap B$$

or $\overline{A} \in \mathcal{T}$, donc $\overline{A}\cap B \in \mathcal{T}'$. On a bien la stabilité par complémentaire.

— Soit $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}'$. Il existe une famille d'éléments $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{T}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A'_n = A_n \cap B$$

Ainsi,

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A'_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}(A_n \cap B) = (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) \cap B$$

D'après une propriété bien connue : $(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) \in \mathcal{T}$. On a donc bien $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A'_n \in \mathcal{T}'$.

Tribu – 3

Soit Ω un ensemble fini.

1. On considère $\mathcal{T} = \{A \subset \Omega, A \text{ ou } \overline{A} \text{ est au plus dénombrable}\}$. Démontrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.
2. Démontrer que $\mathcal{U} = \{A \subset \Omega, A \text{ ou } \overline{A} \text{ est fini}\}$ n'est pas une tribu sur Ω.

---

1. On a bien $\emptyset \in \mathcal{T}$. De plus, si $A \in \mathcal{T}$, il est clair que $\overline{A} \in \mathcal{T}$.

Vérifions donc le troisième (et dernier) axiome. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Si tous les ensemble A_n sont au plus dénombrables, alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n$ est dénombrable, comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.

Supposons que l'un d'entre eux ne soit pas dénombrable, par exemple A_0. $\overline{A_0}$ doit l'être. On remarque que

$$\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \overline{A_n} \subset \overline{A_0}$$

Ainsi le complémentaire de $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n$ est dénombrable, comme sous-ensemble d'un ensemble dénombrable. Cela implique que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \in \mathcal{T}$. On a donc démontré que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n$ est dans $\mathcal{T}$ ce qui achève la démonstration.

2. Cet ensemble n'est pas stable par union infinie, donc ce n'est pas une tribu.

Transfert d'univers

Soient Ω et E deux ensembles quelconques non vides. Soit $f : E \to \Omega$ une application. Si $A \subset \Omega$, on note $f^{-1}[A]$ l'image réciproque de A définie par

$$f^{-1}[A] = \{x \in E, f(x) \in A\}$$

1. (a) Démontrer que, pour $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$,

$$f^{-1}[\overline{A}] = \overline{f^{-1}[A]} \text{ et } f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$

   (b) En déduire $f^{-1}[\emptyset]$ et $f^{-1}[A \cap B]$.
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de Ω. Démontrer que

$$f^{-1}[\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n] = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} f^{-1}[A_n] \text{ puis que } f^{-1}[\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n] = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} f^{-1}[A_n]$$

3. On considère une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω. Et on définit $\mathcal{U} = \{f^{-1}[A], A \in \mathcal{T}\}$. Démontrer que $\mathcal{U}$ est une tribu sur E.
4. Soit g l'application de $\Omega = \{1, 2\}$ dans $E = \{a, b\}$ définie par $f(1) = f(2) = a$. Démontrer que l'image de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ par f n'est pas une tribu sur E.

1.a Commençons par la première égalité :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[\overline{A}] &\iff f(x) \in \overline{A} \\ &\iff \text{non } (f(x) \in A) \\ &\iff \text{non } (x \in f^{-1}[A]) \\ &\iff x \in \overline{f^{-1}[A]} \end{aligned}$$

La seconde égalité se démontre de même :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A \cup B] &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff (f(x) \in A)\text{ou}(f(x) \in B) \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \end{aligned}$$

1.b Comme $f^{-1}[\Omega] = E$, par passage au complémentaire, $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$. Toujours grâce au complémentaire,

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}] = \overline{f^{-1}[\overline{A}] \cup f^{-1}[\overline{B}]} = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de E.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n] &\iff f(x) \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \\ &\iff \exists i \in \mathbb{N}, f(x) \in A_i \\ &\iff \exists i \in \mathbb{N}, x \in f^{-1}[A_i] \\ &\iff x \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} f^{-1}[A_n] \end{aligned}$$

La seconde égalité de cette question se démontre par passage au complémentaire ou bien directement.

3. Vérifions les trois axiomes des tribus

— D'après la question 1.b, $\emptyset$, qui est sa propre image réciproque, est dans $\mathcal{U}$.

— Soit $C \in \mathcal{U}$. On peut donc écrire $C = f^{-1}[A]$ avec $A \in \mathcal{T}$. D'après la question 1.b, $\overline{C} = f^{-1}[\overline{A}]$ et $\overline{A} \in \mathcal{T}$, donc $\overline{C} \in \mathcal{U}$.

— Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{U}$. Par définition de $\mathcal{U}$, pour tout n on a $C_n = f^{-1}[A_n]$ avec $A_n \in \mathcal{T}$. En utilisant la question 2. on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_n] = f^{-1}[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n] \in \mathcal{U}$$

4. Dans cet exemple, $\mathcal{P}(\Omega)$ contient 4 éléments. Son image par f s'écrit $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Ce n'est pas une tribu car elle ne contient pas le complémentaire de $\{a\}$ qui est $\{b\}$.

Ainsi, l'image réciproque permet de transférer une tribu d'un ensemble à un autre, mais pas l'image directe.

Chapitre 22

Espaces probabilisés

22.1 Exercices

Paradoxe du singe

Un singe immortel (cousin de Hanoumân ☺) passe son temps à taper sur une machine à écrire, choisissant chaque touche au hasard et indépendamment des autres. Quelle est la probabilité qu'il tape exactement **A la recherche du temps perdu** ?

(Pour simplifier, on considère que le singe n'utilise que 75 caractères et qu'ils sont suffisants.)

On cherche donc la probabilité de l'événement A : *le singe tape exactement le texte de A la recherche du temps perdu*.

Notons N la longueur du chef-d'œuvre. Observons le texte que le singe a produit en N pressions. Ce texte est celui de la Recherche avec la probabilité $\frac{1}{75^N}$, par indépendances des saisies. Ainsi, le texte n'est pas la Recherche avec la probabilité $1 - \frac{1}{75^N}$.

Considérons maintenant une série de n x N caractères consécutifs, que l'on divise en n blocs de N lettres (avec $n \in \mathbb{N}^*$). La probabilité de l'événement B_n *aucun des n blocs ne correspond à la Recherche* est $P(B_n) = (1 - \frac{1}{75^N})^n$, toujours en utilisant l'indépendance des saisies.

L'événement $\overline{A}$ *le singe ne tape la Recherche* étant inclus dans tous les B_n, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{A} \subset B_n \implies \forall n \in \mathbb{N}^*, P(\overline{A}) \leq P(B_n) = (1 - \frac{1}{75^N})^n$$

Mais $P(B_n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, donc $P(\overline{A}) = 0$. Ainsi, l'événement voulu est presque sûr. ☺☺

Ordre de grandeur : Toutefois, le temps d'attente moyen de cet événement est de 75^N caractères. Etant donné que $N \approx 9,6 \times 10^6$, ce temps d'attente moyen est largement supérieur à l'âge de notre univers…

En probabilités, on préfère en général parler d'une propriété presque sûrement vraie, au lieu d'utiliser l'expression *vraie presque partout.* Une propriété est presque sûrement vraie lorsqu'elle est vérifiée dans un ensemble dont la probabilité est égale à 1. La probabilité étant une mesure et l'espace mesurable ayant une probabilité de 1, c'est bien un cas particulier de la situation précédente. De même, une propriété est dite presque sûrement fausse lorsqu'elle est vérifiée dans un ensemble dont la probabilité est égale à 0.

Jeu avec une pièce équilibrée

Le joueur FF joue contre le joueur PF avec une pièce équilibrée. On lance cette pièce. Si la séquence *FF* est observée avant la séquence *PF* alors le joueur FF est vainqueur. Si c'est l'autre séquence (*PF*)qui est observée avant, alors c'est le second joueur.

1. Justifier que la probabilité que personne ne gagne est nulle.
2. En considérant les résultats des deux premiers lancers, montrer que PF a la plus grande probabilité de l'emporter.

---

1. Les résultats qui ne font gagner aucun des deux joueurs sont les successions infinies *PPP...* et *FPP...* ; d'après le cours, chacune est de probabilité nulle.

Démonstration. Lorsqu'on lance une infinité de fois une pièce on ne peut rien observer.

Plaçons-nous dans $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la probabilité d'une pièce équilibrée. Donnons-nous une suite infinie de 0 et de 1 du genre

$$(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} = 01100010...........$$

Quelle est la probabilité d'obesrver cette séquence ? Pour N fixé dans $\mathbb{N}$, deefinissons l'événement A_N par

$$A_N = [\prod_{n=1}^{N} \{\omega_n\}] \times \Omega^{\mathbb{N}}$$

Il correspond aux résultats dont les N premiers lancers sont exactement ceux de la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'intersection des A_N contient les lancers qui correspondent terme à terme à la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il n'y a bien sûr qu'un résultat de cette sorte, et donc

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\cap} A_N = \{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

Comme la suite d'événement A_N est décroissante pour l'inclusion

$$P(\underset{N\in\mathbb{N}}{\cap} A_N) = \underset{N\to+\infty}{lim} A_N = \underset{N\to+\infty}{lim} \frac{1}{2^N} = 0$$

Bref $P(\{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}\}) = 0$. La probabilité d'observer exactement la suite de résultat $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc nulle quelle que soit cette suite. □

2. Les deux premiers lancers donnent *FF*, *PF*, *FP* et *PP*, avec la probabilité $\frac{1}{4}$ chacun. Dans le premier cas de figure, FF gagne immédiatement et dans le deuxième PF gagne de suite. Dans les deux autres cas, PF gagne dès l'apparition du premier Face, ce qui arrive presque sûrement. Finalement PF gagne avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

Une pièce truquée...

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène Face avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son n-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête ?
4. Y a-t'il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même prbabilité de gagner ?

---

1. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement *le lancer k donne Face* et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n *le joueur A gagne lors de son n-ième lancer.*

L'événement A_n est réalisé lorsque lorsqu'il y a eu $2n-1$ lancers dont seul le dernier a donné Face. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap ... \cap \overline{F_{2n-2}} \cap F_{2n-1}) \\ &= P(\overline{F_1}).P(\overline{F_2})...P(\overline{F_{2n-2}}).P(F_{2n-1}) \text{ par indépendance} \\ &= (1-p)^{2n-2}.p \end{aligned}$$

2. L'événement *A gagne* s'écrit $\underset{n\geq 1}{\cup} A_n$. Comme les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont disjoints, on peut utiliser l'axiome de σ-additivité, qui donne ici

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2n-2}.p = p.\sum_{n=1}^{\infty}((1-p)^2)^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

3. Déterminons d'abord la probabilité que le joueur B gagne. Par un raisonnement similaire on trouve que le joueur B gagne à son n-ième lancer avec la probabilité

$$P(B_n) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap ... \cap \overline{F_{2n-1}} \cap F_{2n}) = (1-p)^{2n-1}.p$$

La probabilité que le joueur B gagne est donc

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2n-1}.p = p(1-p).\sum_{n=1}^{\infty}((1-p)^2)^{n-1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

L'événement *le jeu s'arrête* correspond à $A \cup B$. Ces deux événements étant disjoints, on peut écrire

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$$

Ainsi l'événement *le jeu ne s'arrête jamais* est de probabilité nulle.

4. Puisque $p > 0$, $1-p < 1$ et donc $P(B) < P(A)$. Le joueur A est favorisé à ce jeu quelle que soit la valeur de p. Le fait de commencer est un avantage décisif.

Suite d'événéments presque sûrs − 1

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements presque sûrs dans un espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Démontrer que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n$ est presque sûr.

Puisque $A_0 \subset \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n$, on a, par croissance des probabilités $P(A_0) \leq P(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n)$. Ainsi, comme $P(A_0) = 1$, on a $P(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) = 1$.

Suite d'événements presque sûrs − 2

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements presque sûrs dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Démontrer que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n$ est presque sûr.

Passons au complémentaire et utilisons la propriété de sous-additivité :

$$P(\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n}) = P(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overline{A_n}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(\overline{A_n})$$

Mais puisque $P(A_n) = 1$ on a $P(\overline{A_n}) = 0$. Ainsi $P(\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n}) \leq 0$ et donc $P(\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n}) = 0$ d'où le résultat.

Suite d'événements mutuellement indépendants

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Démontrer que

$$P(\bigcap_{n\geq 0} A_n) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

La suite $(\bigcap_{n\geq 0}^{N} A_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. D'après la propriété de la limite monotone

$$P(\bigcap_{N\geq 0}(\bigcap_{n=0}^{N} A_n)) = \lim_{N\to+\infty} P(\bigcap_{n=0}^{N} A_n)$$

D'une part $\bigcap_{N\geq 0}(\bigcap_{n=0}^{N} A_n) = \bigcap_{n\geq 0} A_n$ et d'autre part, par indépendance des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$P(\bigcap_{n=0}^{N} A_n) = \prod_{n=0}^{N} P(A_n) \text{ donc } \lim_{N\to+\infty} P(\bigcap_{n=0}^{N} A_n) = \prod_{n\geq 0} P(A_n)$$

Loi de Zipf

Soit $a \in]1, +\infty[$. On définit$\zeta(a)$ par $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

1. Démontrer que l'on peut définir une probabilité P_a sur $\mathbb{N}^*$ à l'aide des réels
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \frac{1}{\zeta(a).k^a} \text{ (loi de Zipf de paramètre a)}$$
On considère désormais l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), P_a)$.
2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $m\mathbb{N}^* = \{km, k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $P_a(m\mathbb{N}^*)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux entiers i et j pour que A_i et A_j soient indépendants.
4. (*Application*) On note p_i le i-ième nombre premier (avec $i \in \mathbb{N}^*$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3, ...$) et C_n l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers p_i pour $1 \leq i \leq n$.
   (a) Calculer $P_a(C_n)$.
   (b) Déterminer $\bigcap_{n\geq 1} C_n$.
   (c) En déduire le développement eulérien de la fonction ζ
$$\forall a > 1, \zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty}(1 - (\frac{1}{p_i^a}))^{-1}$$

---

1. En utilisant le théorème du germe de probabilité, les réels p_k sont tous positifs et

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(a).k^a} = \frac{1}{\zeta(a)}.\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \frac{\zeta(a)}{\zeta(a)} = 1$$

Ils définissent donc bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, par le calcul on trouve

$$P(m\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{km} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(a).(km)^a} = \frac{1}{m^a.\zeta(a)}.\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{m^a}$$

3. Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'une part, d'après le calcul preecédent, $P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{(ij)^a}$. D'autre part, $A_j \cap A_j$ est l'ensemble des entiers qui sont multiples à la fois de i et de j. On a donc $A_i \cap A_J = A_{ppcm(i,j)}$. Comme

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{(ppcm(i,j))^a}$$

les événements A_i et A_j sont indépendants si et seulement si $i.j = ppcm(i,j)$, c'est-à-dire si i et j sont premiers entre eux.

4.a On peut écrire $C_n = \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} \overline{p_i\mathbb{N}^*}$. En reprenant la question précédente, on prouve que les $(p_i\mathbb{N}^*)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants. Il en va donc de même de leurs complémentaires, donc

$$P_a(C_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - P_a(p_i\mathbb{N}^*)) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{p_i^a})$$

4.b L'ensemble $\underset{n\geq 1}{\cap} C_n$ est l'ensemble des entiers non nuls qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers. Evidemment, il n'y a que 1 dans ce cas, et donc $\underset{n\geq 1}{\cap} C_n = \{1\}$.

4.c Comme la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = P(\underset{n\geq 1}{\cap} C_n) = P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(a)}$$

On obtient donc le deeveloppement eulérien voulu :

$$\zeta(a) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{p_i^a})^{-1}$$

Germe de probabilité *Cas infini*

Une probabilité sur un ensemble infini dénombrable est entièrement caractérisée par sa valeur sur les singletons.

Plus précisément, soit Ω un ensemble infini deenombrable, noté $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$ soit convergente et de somme 1. Alors il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(\{\omega_n\}) = p_n$$

Chapitre 23

Variables Aléatoires

23.1 Lois Usuelles

23.1.1 Loi Uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si et seulement si

- $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$
- $\forall x \in [\![1, n]\!], P(X = x) = \frac{1}{n}$

On note alors $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Une telle variable aléatoire admet pour espérance et pour variance $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

23.1.2 Loi de Bernoulli

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et p un réel dans]0,1[. Une variable aléatoire X sur Ω suit la loi de Bernoulli de paramètre p si et seulement si

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$. On pose aussi couramment q=1-p. Une telle variable aléatoire admet pour espérance et pour variance $E(X) = p$ et $V(X) = p.q$.

23.1.3 Loi Binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si

- $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
- $\forall k \in [\![1, n]\!], P(X = k) = C_n^k.p^k.q^{n-k}$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Une telle variable aléatoire admet pour expérance et pour variance $E(X) = n.p$ et $V(X) = n.p.q$.

23.1.4 Loi Géométrique

Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$ si et seulement si

— $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

— $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = q^{k-1}.p$

On note $\mathcal{G}(p)$ cette loi. La variable aléatoire X admet une espérance et une variance $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$.

Loi géométrique sur $\mathbb{N}$. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$ si et seulement si

— $X(\Omega) = \mathbb{N}$

— $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = q^k.p$

On note $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ cette loi. La variable aléatoire X admet une espérance et une variance $E(X) = \frac{1}{p} - 1$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$.

23.1.5 Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Une variable aléatoire X définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ suit une loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si

— $X(\Omega) = \mathbb{N}$

— $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$

On notera dans ce cas $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. La variable aléatoire X admet une espérance et une variance $E(X) = V(X) = \lambda$.

Loi de Poisson comme approximation de la loi binomiale. Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels dans]0,1[tels que $(np_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite non nulle λ. Dans ce cas,

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$$

23.2 Exercices de référence

Caractérisation par la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On note

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(X \leq x) \end{array} \right.$$

On dit que F_X est la **fonction de répartition** de X.

1. Démontrer que F_X est croissante. Justifier qu'elle admet une limite finie à gauche et à droite en tout point.
2. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. Démontrer que F_X est continue à droite en tout point.
4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x) = P(X = x_0)$. Justifier que F_X caractérise complètement la loi de X.

---

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \leq y$. On a

$$F_X(y) - F_X(x) = P(X \leq y) - P(X \leq x) = P(x < X \leq y)$$

en utilisant le fait que l'événement $(X \leq x)$ est inclus dans l'événement $(X \leq y)$. Puisque $F_X(y) - F_X(x) \geq 0$, la fonction F_X est bien croissante.

Comme F_X est croissante et bornée par 0 et 1, elle admet une limite finie à gauche et à droite en tout point.

2. Puisque F_X est croissante et majorée, elle admet une limite en $+\infty$. On peut calculer cette limite comme $\lim\limits_{n \to +\infty} F_X(n)$, c'est-à-dire comme la limite de la suite $(P(X \leq n))_{n \in \mathbb{N}}$. Or la suite d'événements $((X \leq n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (au sens de l'inclusion). D'après le théorème de la limite monotone

$$\lim_{n \to +\infty} P(X \leq n) = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X \leq n))$$

Mais bien sûr $(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} X \leq n) = (X \in \mathbb{R}) = \Omega$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_X(n) = 1$. On procèdera de même en $-\infty$ avec la suite d'événements décroissants $((X \leq -n))_{n \in \mathbb{N}}$ pour trouver $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = P(\emptyset) = 0$.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme la fonction F_X est croissante, on sait qu'elle admet une limite à droite en x_0. Il reste à démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$. Comme l'existence de cette limite est établie, on peut utiliser une méthode séquentielle. On considère la suite $(x_0 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui tend vers x_0 et on cherche à calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x_0 + \frac{1}{n})$. Pour cela on part de

$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) = P(x_0 < X \leq x_0 + \frac{1}{n})$$

Comme la suite d'événements $((x_0 < X \leq x_0 + \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, d'après le théorème sur la limite monotone

$$\lim_{n\to+\infty} P(x_0 < X \leq x_0+\frac{1}{n}) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(x_0 < X \leq x_0+\frac{1}{n})) = P(X \in \bigcap_{n=1}^{+\infty}]x_0; x_0+\frac{1}{n}])$$

Puisque $\bigcap_{n=1}^{+\infty}]x_0; x_0 + \frac{1}{n}]$ est l'ensemble vide, on a

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) = P(\emptyset) = 0 \iff \lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

d'où le résultat.

4. Procédons comme à la question précédente pour calculer la limite à gauche de F_X. D'après la question 1 cette limite existe et on la calcule par une méthode séquentielle

---

Fonction de répartition de lois classiques

1. (a) Soit $p \in]0, 1[$ et X suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Donner la fonction de répartition de X, c'est-à-dire calculer $P(X \leq n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Préciser également $P(X \geq n)$.
   (b) Vérifier que la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est bien une loi sans mémoire.
2. Démontrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X \leq n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n \mathrm{dx}$$

Une loi avec une double somme *MP*
On considère les réels $p_{i,j} = \lambda.\frac{a^{i+j}}{i!j!}$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ et $a > 0$.

1. Déterminer la valeur de λ pour laquelle ils forment la loi conjointe d'un couple de variable aléatoire.

On suppose la condition remplie. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ admettant les $p_{i,j}$ comme coefficients de sa loi.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de la somme X+Y.

---

1. Une première condition est que λ soit dans $\mathbb{R}_+$, afin que les coefficients soient positifs. La seconde condition est que la somme double$\sum\sum p_{i,j}$ soit convergente et de somme 1. C'est le cas si et seulement si

— à j fixé dans $\mathbb{N}$ la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda a^{i+j}}{i!j!}$ est convergente

— la série $\sum_{j=0}^{+\infty}[\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda a^{i+j}}{i!j!}]$ est convergente et de somme 1

Aucune des deux étapes ne pose de problème technique :

— à j fixé $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda a^{i+j}}{i!j!}$ est proportionnelle à la série exponentielle. Elle est donc convergente et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda a^{i+j}}{i!j!} = \lambda e^a \frac{a^j}{j!}$$

— la série des sommes partielles est également proportionnelle à la série exponentielle et de somme $\lambda e^a e^a$. Cette double somme vaut 1 pour $\lambda = e^{-2a}$.

En conclusion, pour $\lambda = e^{-2a}$, la famille de réel $(p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définit la loi d'un vecteur aléatoire (X,Y).

2. On trouve la loi de X par sommation sur j et la loi de Y par sommation sur i. C'est ce qu'on a fait à l'étape précédente.

$$\forall i \in \mathbb{N}, P(X = i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{e^{-2a}.a^{i+j}}{i!j!} = e^a.\frac{a^i}{i!}$$

On reconnait la loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$. Comme la loi conjointe de X et Y est symétrique, Y suit la même loi que X.

3. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes puisque

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = e^a.\frac{a^i}{i!}.e^a.\frac{a^j}{j!} = P(X = i).P(Y = j)$$

4. D'après le cours, X+Y étant la somme de deux variables de Poisson indépendantes, sa loi est $\mathcal{P}(2a)$.

23.3 Pratique approfondie

Une loi dépendant de deux paramètres

Soient α et β deux réels et pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a.\frac{\alpha^k+\beta^k}{k!}$.

1. Suivant les valeurs de α et β, discuter l'existence de a pour que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le cas échéant, déterminer a.
2. Peut-il arriver que X suive une loi de Poisson ?

---

1. Il faut que $p_k \geq 0$ pour tout k, c'est-à-dire que $\alpha^k + \beta^k \geq 0$. Si k est pair cette inégalité est vraie. Pour $k = 1$ on trouve $\alpha \geq -\beta$. En élevant à la puissance, cette condition assure que $\alpha^k + \beta^k \geq 0$ pour k impair. Ainsi on suppose désormais cette condition.

La convergence de la série de terme général p_k est évidente et

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = a(e^\alpha + e^\beta) = 2ae^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.ch(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

Ainsi il est toujours possible de s'assurer que cette somme fait 1 en posant

$$a = \frac{e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}}{2.ch(\frac{\alpha-\beta}{2})}$$

2. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a

$$\left\{\begin{array}{ll} P(X=0) & = e^{-\lambda} = 2a \\ P(X=1) & = \lambda.e^{-\lambda} = a(\alpha+\beta) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} e^{-\lambda} & = 2a \\ 2\lambda & = \alpha+\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} & = \frac{e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}}{ch(\frac{\alpha-\beta}{2})} \\ 2\lambda & = \alpha+\beta \end{array}\right.$$

La première équation montre qu'on doit avoir $\alpha = \beta$. Cette condition est suffisante, et X suit alors une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \alpha$.

Deux lois de Poisson différentes

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de X sachant que (X+Y=n).

On sait que X+Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ll} \text{Si } k \leq n, P_{(X+Y=n)}(X=k) & = \frac{P((X=k)\cap(X+Y=n))}{P(X+Y=n)} \\ & = \frac{P((X=k)\cap(Y=n-k))}{P(X+Y=n)} \\ & = \frac{P(X=k).P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \text{ par indépendance} \\ & = C_n^k.(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^k.(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{n-k} \end{array}$$

$$\text{Si } k > n, P_{[X+Y=n)}(X=k) = 0$$

On reconnait donc une loi binomiale $\mathcal{B}(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$.

Somme de deux lois géométriques de paramètres différents

Les variables aléatoires X et Y suivent des lois géométriques à valeurs dans $\mathbb{N}$, deparamètres respectifs $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$, et sont indépendantes. de plus $p_1 \neq p_2$. Trouver la loi de Z=X+Y.

D'une part, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} p_1 q_1^k . p_2 q_2^{n-k} = p_1 p_2 \frac{q_2^{n+1} - q_1^{n+1}}{q_2 - q_1}$$

Le gardien ivre

Un gardien de phare a 10 clefs, dont une seule ouvre la porte du phare. Pour ouvrir une porte, il a deux méthodes. Méthode A : à jeun, il n'essaye qu'une fois chaque clef. Méthode B : ivre, chaque clef peut être essayée plusieurs fois.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire égale au nombre de clefs essayées dans la méthode A (respectivement B) avant d'ouvrir la porte (y compris la bonne clef). Calculer P(X_A=k) et P(X_B=k).
2. Dans le cas B, montrer que la probabilité pour que le gardien n'ouvre jamais la porte est nulle.
3. On sait que le gardien est ivre un jour sur 3. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'avait toujours pas ouvert sa porte. Calculer la probabilité pour qu'il fût ivre. Moralité ?

---

1. On reconnait dans la méthode B un processus de Bernoulli. La loi de X_B est donc géométrique sur $\mathbb{N}^*$: $X_B \sim \mathcal{G}(\frac{1}{10})$.

La variable aléatoire X_A est à valeurs dans $[\![1,10]\!]$. Soit $k \in X_A(\Omega)$. En notant C_i l'événement *la bonne clef a été utilisée au rang i*

$$\begin{aligned} P(X_A = k) &= P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap ... \cap \overline{C_{k-1}} \cap C_k) \\ &= P(\overline{C_1})P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2})...P_{\overline{C_1}\cap ... \cap \overline{C_{k-1}}}(C_k) \text{ probabilités composées} \\ &= \tfrac{9}{10}\tfrac{8}{9}\cdots\tfrac{10-k+1}{10-k+2}\tfrac{1}{10-k+1} \\ &= \tfrac{1}{10} \end{aligned}$$

Ainsi X_A suit la loi uniforme sur $[\![1,10]\!]$.

2. Dans le cas B, la probabilité de l'événement D *le gardien n'ouvre jamais la porte* peut s'écrire $P(D) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(X_B \geq n))$. Comme la suite d'événements $(X_B \geq n)$ est strictement décroissante, d'après le théorème de la limite monotone

$$P(D) = \lim_{n \to +\infty} P(X_B \geq n) = \lim_{n \to +\infty} (\frac{9}{10})^{n-1} = 0$$

(La probabilité $P(X_B \geq n)$ a été calculée dans l'exercice de références numéro 2.)

3. Notons X le nombre d'essais pour que le gardien ouvre la porte, et I l'événement *le gardien est ivre*. D'après la formule de Bayes

$$\begin{aligned} P_{(X>8)}(I) &= \frac{P_I(X>8).P(I)}{P_I(X>8).P(I)+P_{\overline{I}}(X>8).P(\overline{I})} \\ &= \frac{P(X_B>8).P(I)}{P(X_B>8).P(I)+P(X_A>8).P(\overline{I})} \end{aligned}$$

La probabilité $P(X_B > 8)$ vaut $(\frac{9}{10})^6$. Puisque X_A suit une loi uniforme

$$P(X_A > 8) = P(X_A \in [\![9, 10]\!]) = \frac{2}{10}$$

Tous calculs faits $P_{(X>8)}(I) \approx 0,57$. La probabilité que le gardien soit saoul est de 1/3 ; mais l'observation de son comportement permet de modifier cette valeur.

Chez le médecin...

Vous êtes assis avec Arnold dans la salle d'attente d'un médecin. Comme l'attente est longue, vous observez les gens.

1. Arnold vous parie que le nombre de personnes entrant avant la première femme est pair. Prenez-vous le pari ?
2. Arnold vous parie enseuite que le nombre de personnes entrant dans la salle d'attente durant la prochaine heure est pair. Prenez-vous le pari ? (On suppose que le nombre d'arrivant par heure suit une loi de Poisson.)

---

1. Le nombre de personnes N avant la première femme suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre $p \in]0, 1[$. La probabilité que N soit pair est donc

$$\begin{aligned} P(\text{N pair}) &= P(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(N = 2k)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = 2k) \ \sigma\text{-additivité} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} p = \frac{p}{1-q^2} = \frac{p}{(1-q)(1+q)} = \frac{1}{2-p} \end{aligned}$$

Vous prenez le pari si cette probabilité est inférieure à 1/2, ce qui n'arrive jamais !

2. On reprend le même raisonnement, mais avec une loi différente

$$P(\text{N pair}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda}.ch(\lambda)$$

en reconnaissant le développement en série entière de ch. Ainsi $P(\text{N pair}) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$. Cette probabilité est toujours plus grande que 1/2, il ne faut donc pas parier avec Arnold !

Une urne (mais pas comme celle de Motus ☺)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un, successivement, avec remise à chaque fois du jeton tiré. Soit X la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts. Trouver la loi de X, son espérance, sa variance.

Indication : On pourra introduire la famille d'événements A_i : le numéro i est sorti au premier tirage.

D'une part $X(\Omega) = [\![2, +\infty]\!]$. Supposons l'événement A_i réalisé. Dans ce cas X-1 est le temps d'attente du premier numéro différent de i (on soustrait 1 pour tenir compte du tirage réalisé pour observer A_i). Ainsi la loi de X-1 conditionnée par A_i est géométrique de paramètre (n-1)/n.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P_{A_i}(X-1 = k) = \frac{n-1}{n}.\frac{1}{n^{k-1}}$$

donc

$$P(X-1 = k) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(X-1 = k)P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(X-1 = k)\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.\frac{1}{n^{k-1}}$$

En fait, X-1 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{n-1}{n}$ et donc $E(X) = \frac{n}{n-1} + 1$. Par ailleurs, $V(X) = V(X-1) = \frac{n}{(n-1)^2}$.

Une histoire de flux binaire

Un flux binaire est une succession de bits reçus par un ordinateur. La probabilité d'erreur à un bit quelconque est p = 0,02. Les erreurs sont indépendantes entre elles.

1. On appelle N_b le nombre de bits sans erreur entre deux bits erronés. Donner la loi de N_b, son espérance, sa variance.

2. On combine deux flux binaires indépendants, de même probabilité d'erreur, pour obtenir des symboles de deux bits. Donner la loi du nombre de symboles sans erreurs N_s entre deux symboles erronés.

---

1. Qualifions de succès le fait de recevoir un bit correct, et d'échec celui de recevoir un bit erroné. A partir de l'instant où un échec est observé, le nombre de succès avant le prochain échec suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$. Ici $N_b \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(0,98)$.

2. Le même raisonnement tient, en appelant échec le fait que l'un des deux bits est erroné. La probabilité de succès est donc de $0,98^2$ et donc $N_s \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(0,98^2)$.

Indépendances de min(X,Y) et X-Y

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, sont indépendantes et de même loi

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^k$$

avec $p \in]0,1[$ (on notera $q = 1 - p$). On pose U=min(X,Y) et V=X-Y.

1. Déterminer les lois de U et de V.
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

---

1. D'une part $U(\Omega) = \mathbb{N}$. D'autre part, pour $i \in \mathbb{N}$, en utilisant l'indépendance de X et Y,

$$P(U \geq i) = P((X \geq i) \cap (Y \geq i)) = P(X \geq i)P(Y \geq i)$$

Or, on sait que

$$P(X \geq i) = P(Y \geq i) = \sum_{n=i}^{\infty} pq^n = pq^i \frac{1}{1-q} = q^i$$

Donc

$$P(U \geq i) = (q^i)^2 = q^{2i}$$

Le support de U est $\mathbb{N}$ et $\forall i \in \mathbb{N}$

$$P(U = i) = P(U \geq i) - P(U \geq i+1) = q^{2i} - q^{2i+2} = q^{2i}(1-q^2) = p(2-p)q^{2i}$$

Par ailleurs, $V(\Omega) = \mathbb{Z}$ et pour $j \in \mathbb{Z}$, d'aprè-s la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(Z=j) &= \sum_{y=0}^{+\infty} P((X-Y=j)\cap(Y=y)) \\ &= \sum_{y=0}^{+\infty} P((X=j+y)\cap(Y=y)) \\ &= \sum_{y=0}^{+\infty} P(X=j+y).P(Y=y) \text{ indépendance de X et Y} \end{aligned}$$

Si $j+y<0$, c'est-à-dire si $y<-j$, alors $P(X=j+y)=0$. cela ne se produit jamais dans cette somme si j est positif. On revient à distinguer deux cas. Tout d'abord si $j \geq 0$

$$P(Z=j) = \sum_{y=0}^{+\infty} pq^{j+y}.pq^y = p^2q^j \sum_{y=0}^{+\infty} q^{2y} = \frac{p^2q^j}{1-q^2} = \frac{pq^j}{2-p}$$

Le cas $j<0$ se traite avec un argument de symétrie :

$$\forall j<0, P(X-Y=j) = P(Y-X=-j) = \frac{pq^{-j}}{2-p}$$

en utilisant le cas $j \geq 0$. Ces deux cas se résument en une seule formule

$$\forall j \in \mathbb{Z}, P(Z=j) = \frac{pq^{|j|}}{2-p}$$

On peut vérifier que la somme de cette famille est bien 1.

2. Soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$. D'une part,

$$P(U=i).P(V=j) = p(2-p)q^{2i}\frac{pq^{|j|}}{2-p} = p^2q^{2i+|j|}$$

D'autre part,

$$P((U=i)\cap(V=j)) = P((min(X,Y)=i)\cap(X-Y=j)) = P((min(X,Y)=i)\cap(X=j+Y))$$

Si $j \geq 0$, alors l'événement $(min(X,Y)=i)\cap(X=j+Y)$ est aussi $(Y=i)\cap(X=j+Y)$. Par indépendance de X et Y,

$$P((U=i)\cap(V=j)) = P(Y=i)P(X=j+i) = pq^ipq^{j+i} = p^2q^{2i+j} = P(U=i).P(V=j)$$

Tandis que si $j \leq 0$, alors $(min(X,Y)=i)\cap(X=j+Y) = 5X=i)\cap(X=j+Y)$, soit

$$P((U=i)\cap(V=j)) = P((X=i)\cap(Y=i-j)) = pq^ipq^{i-j} = p^2q^{2i-j} = P(U=i).P(V=j)$$

Finalement, U et V sont indépendantes.

Chapitre 24

Espérances

24.1 Résultats importants

Propriété de la valeur absolue Soit X une varaible aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

$$X \text{ admet une espérance} \iff |X| \text{ admet une espérance}$$

Théorème de majoration Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur un espace probabilsé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On suppose que $|X| \leq Y$ c'est-à-dire que

$$\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq Y(\omega)$$

Si Y admet une espérance, alors X admet également une espérance. De plus $|E(X)| \leq E(Y)$.

Propriété sur les variables aléatoires bornées Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Si X est borné alors elle admet une espérance.

Démonstration. En effet, Si X est bornée alors il existe un réel m tel que $|X| \leq m$. Notons $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| P(X = x_n) \leq m P(X = x_n)$$

Comme la série de terme général $mP(X = x_n)$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs, il en va de même de la série de termes $|x_n| P(X = x_n)$. Ainsi X admet une espérance. $\square$

24.2 Exercices classiques

Paradoxe de Saint Pétersbourg

On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée jusqu'à obtenir un Face. Si T lancers sont nécessaires, on gagne 2^T euros. Etes-vous prêts à miser 1 euro, 10 euros, ... ? Quelle serait une mise honnète selon vous ?

La variable aléatoire T est géométrique de raison 1/2. Notons m la mise du joueur. Son gain vaut $G = 2^T - m$. Or G n'admet pqs d'espérance puisque

$$\sum_{k=0}^{n}(2^k - m)\frac{1}{2^k} = n - m(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

On accèpte de jouer à un jeu lorsque l'espérance du gain est positive. Ici, l'espérance est toujours positive : il faut donc accepter de jouer quelle que soit la mise de départ ! (C'est un résultat paradoxal, lié au fait que la valiable aléatoire *gain* n'admet ici pas d'espérance.)

Deux séries d'événements autour de la loi de Bernoulli

On effectue une suite d'expérience de Bernoulli indépendates à deux issues possibles A et B. On s'intéresse à la longueur X_1 de la première série ininterrompue de A ou de B, et à X_2 la longueur de la deuxième série ininterrompue. Par exemple, si on obtient AAABBBBAB..., alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 4$.

On note p la probabilité du résultat A et q = 1-p celle du résultat B. On suppose $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer les lois X_1, (X_1, X_2) et X_2.
2. Calculer les espérances et variances de X_1 et de X_2.
3. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si p=1/2.

---

1. Tout d'abord, $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Notons A_1 l'événement *le premier résultat est A* et B_1 l'événement *le premier résultat est B.* Pour x_1 dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$P(X_1 = x_1) = P((X_1 = x_1) \cap A_1) + P((X_1 = x_1) \cap B_1)$$

On reconnaît dans $P((X_1 = x_1) \cap A_1)$ la probabilté d'observer d'abord x_1 fois le résultat A, puis un résultat B. Par indépendance

$$P((X_1 = x_1) \cap A_1) = p^{x_1}q \text{ de même } P((X_1 = x_1) \cap B_1) = q^{x_1}p$$

ainsi,

$$\forall x_1 \in \mathbb{N}^*, P(X_1 = x_1) = pq^{x_1} + qp^{x_1}$$

On peut vérifier que la somme de ces probabiltés fait bien 1.

L'idée du raisonnement précédent est simplement de distinguer deux cas, selon que la première séquence est constituée de A ou de B. On procède de même pour la loi de (X_1, X_2). Pour $(x_1, x_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\begin{aligned} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)) &= P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap A_1) + P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap B_1) \\ &= p^{x_1} q^{x_2} p + q^{x_1} p^{x_2} q \\ &= p^{x_1+1} q^{x_2} + q^{x_1+1} p^{x_2} \end{aligned}$$

On trouve maintenant la loi de X_2 en sommant sur x_1 :

$$\begin{aligned} \forall x_2 \in \mathbb{N}^*, P(X_2 = x_2) &= \textstyle\sum_{x_1 \geq 1} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)) \\ &= \textstyle\sum_{x_1 \geq 1} (p^{x_1+1} q^{x_2} + qx_1 + 1px_2) \\ &= q^{x_2-1} p^2 [\textstyle\sum_{x_1 \geq 1} p^{x_1-1} q] + p^{x_2-1} q^2 [\textstyle\sum_{x_1 \geq 1} q^{x_1-1} p] \ (*) \\ &= p^2 q^{x_2-1} + q^2 p^{x_2-1} \end{aligned}$$

On a reconnu dans les deux sommes de la lignes (*) les sommes des probabilités d'une loi géométriques : ces sommes valent donc 1.

2. Les moments d'ordre 1 et 2 de X_1 et X_2 se calculent en tirant parti des sommes connues sur la loi géométrique. Par exemple, sous réserve d'existence

$$E(X_1) = \sum x \geq 1 x_1 P(X_1 = x_1) = \sum_{x \geq 1} x_1 (pq^{x_1} + qp^{x_1})$$

La série $\sum_{x_1 \in \mathbb{N}^*} x_1 pq^{x_1} + x_1 qp^{x_1}$ est absolument convergente, comme combinaison linéaire de deux séries absolument convergentes (ici les termes étant positifs, absolue convergence et convergence sont similaires). Sa somme vaut donc

$$E(X_1) = q[\sum_{x_1 \geq 1} x_1 pq^{x_1-1}] + p[\sum_{x_1 \geq 1} x_1 qp^{x_1-1}] = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}$$

On prouve de même les autres convergences absolues et on trouve

$$E(X_1^2) = \frac{q(1+q)}{p^2} + \frac{p(1+p)}{q^2} \text{ ainsi } V(X_1) = \frac{q}{p^2} + \frac{p}{q^2} - 2$$

$$E(X_2) = 2 \text{ et } V(X_2) = \frac{1+q}{p} + \frac{1+p}{q} - 4$$

3. Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned} P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) &= P(X_1 = 1).P(X_2 = 1) \\ p^2 q + q^2 p &= 2pq(p^2 + q^2) \end{aligned}$$

On divise par pq et on utilise $p + q = 1$ pour aboutir à l'équation $2(p^2 + (1 - p)^2) = 1$. Cette équation admet une unique solution : $p = \frac{1}{2}$.

Réciproquement, par le calcul, si $p = \frac{1}{2}$, alors X_1 et X_2 sont indépendantes. En somme, les variables aléatoires sont indépendantes si A et B sont indiscernables du point de vueb des probabilités. On retrouve bien l'idée que l'indépendance est une propriété, non pas des événements, mais des probabilités qu'on leur attribue.

Temps d'attente du n-ième succès

On effectue un série d'expériences de type succès-échec, indépendantes, avec une probabilité de succès commune égale à p ($p \in]0,1]$). On se place donc dans l'univers $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la probabilité rendant les lancers mutuellement indépendants. On note T_n le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le n-ième succès.

1. Identifier la loi de T_1.
2. Donner directement la loi de T_2, puis de T_n pour n quelconque.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $i \in T_n(\Omega)$, déterminer la loi de $T_{n+1} - T_n$ conditionnée à $(T_n = i)$. En déduire la loi de $T_{n+1} - T_n$.
4. A l'aide de $T_n - T_1 = \sum_{k=2}^{n}(T_k - T_{k-1})$, déterminer $E(T_n)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $T_{n+1} - T_n$ et T_n sont indépendantes. En déduire $V(T_n)$.
6. En tirant parti de l'indépendance de $T_{n+1} - T_n$ et T_n, calculer la fonction génératrice de T_n. En déduire la formule du binôme négatif

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} C_k^n . x^{k-n}$$

---

1. On reconnait l'expérience de la loi géométrique : $T_1 \sim \mathcal{G}(p)$.

2. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on notera S_i l'événement *observer un succès au rang* i et $E_i = \overline{S_i}$. Déterminons la loi de T_2. Tout d'abord, son support est $[\![2, +\infty[\![$, puisqu'il faut au moins deux lancers pour observer le second succès. Si $k \in [\![2, +\infty[\![$, l'événement $(T_2 = k)$ s'écrit

$$(T_2 = k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (E_1 \cap E_2 \cap E_3 ... \cap E_{i-1} \cap S_i \cap E_{i+1} ... \cap E_{k-1} \cap S_k)$$

Cette union disjointe porte sur les successions de k succès-échecs formées de 2 succès et k-2 échecs et se terminant par un succès.

Tous ces événements comptent 2 et k-2 échecs indépendants. Ils ont donc la même probabilités, à savoir p^2q^{k-2} (avec $q = 1 - p$). De plus il y en a autant que de manière de placer le primier succès, c'est-à-dire k-1. Ainsi

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![, P(T_2 = k) = C_{k-1}^1 p^2 q^{k-2}$$

Généralisons ce raisonnement pour déterminer la loi de T_n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Le support de T_n est $[\![n, +\infty[\![$. De plus, pour $k \in T_n(\Omega)$, l'événement $(T_n = k)$ s'écrit comme union disjointe d'une succession de succès et d'échecs comptant n succès, k-n échecs et se terminant par un succès. Ces successions sont de même probabilité $p^n q^{k-n}$. Il y en a autant que de façon de placer n-1 succès parmi les k-1 premières places, c'est-à-dire C_{k-1}^{n-1}. Finalement

$$\forall \in [\![n, +\infty[\![, P(T_n = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $T_{n+1} - T_n$ correspond à l'intervalle de remps entre le n-ième succès et le (n+1)-ième. Son support est donc $\mathbb{N}^*$. Soient $i \in T_n(\Omega)$ et $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P((T_n = i) \cap (T_{n+1} - T_n = j)) &= P((T_n = i) \cap (T_{n+1} = j + i)) \\ &= P((T_n = i) \cap E_{i+1} \cap ... \cap E_{i+j-1} \cap S_{i+j}) \\ &= P(T_n = i).P(E_{i+1} \cap ... \cap E_{i+j-1} \cap S_{i+j}) \end{aligned}$$

Ici, on utilise l'indépendance entre $(T_n = i)$, qui est un événement portant sur les i premiers lancers, et $(E_{i+1} \cap ... \cap E_{i+j-1} \cap S_{i+j})$ qui porte sur les j suivants.

$$P((T_n = i) \cap (T_{n+1} - T_n = j)) = P(T_n = i).pq^{j-1}$$

donc

$$P_{(T_n=i)}(T_{n+1} - T_n = j) = \frac{P((T_n = i) \cap (T_{n+1} - T_n = j))}{P(T_n = i)} = pq^{j-1}$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((T_n = i))_{i \in T_n(\Omega)}$,

$$\begin{aligned} P(T_{n+1} - T_n = k) &= \sum_{i=n}^{\infty} P_{(T_n=i)}(T_{n+1} - T_n = k).P(T_n = i) \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} q^{k-1} p P(T_n = i) \\ &= pq^{k-1} (\sum_{i=n}^{\infty} P(T_n = i)) \\ &= pq^{k-1} \times 1 \\ &= pq^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnait alors que $T_{n+1} - T_n$ suit une loi géomeetrique de paramètre p. On aurait pu l'affirmer d'instinct...

4. Avec la formule $T_n = \sum_{k=2}^n (T_k - T_{k-1}) + T_1$, T_n apparaît comme la somme de variables aléatoires admettant une espérance. Par linéarité T_n admet une espérance et

$$E(T_n) = E(\sum_{k=2}^n (T_k - T_{k-1}) + T_1) = \sum_{k=2}^n E(T_k - T_{k-1}) + E(T_1) = \frac{n}{p}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\![n, +\infty[\![$ et $j \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3

$$P((T_n = i) \cap (T_{n+1} - T_n = j)) = pq^{j-1}.P(T_n = i) = P(T_{n+1} - T_n = j).P(T_n = i)$$

donc les variables aléatoires T_n et $T_{n+1} - T_n$ sont indépendantes. Ainsi

$$V(T_{n+1}) = V((T_{n+!} - T_n) + T_n) = V(T_{n+1} - T_n) + V(T_n) = \frac{q}{p^2} + V(T_n)$$

La suite $(V(T_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc arithmétique de raison $\frac{q}{p^2}$. On en déduit

$$V(T_n) = (n-1)\frac{q}{p^2} + V(T_1) = n.\frac{q}{p^2}$$

6. Notons g_n la fonction génératrice de T_n et h celle de $T_{n+1} - T_n$. La loi de $T_{n+1} - T_n$ est géométrique de raison p, donc

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[, h(t) = \frac{pt}{1-qt}$$

Comme $T_{n+1} - T_n$ et T_n sont indépendantes et de somme T_{n+1}, on a d'après le cours $g_{n+1} = h \times g_n$. Ainsi, de proche en proche,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[, g_n(t) = [h(t)]^{n-1} g_1(t) = [h(t)]^n = [\frac{pt}{1-qt}]^n$$

En effet, $g_1 = h$, puisque T_1 suit également la loi géométrique de raison p. Par ailleurs, par définition de la fonction génératrice,

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[, g_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(T_n = k) t^k = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} t^k$$

donc

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[, [\frac{pt}{1-qt}]^n = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} t^k$$

Pour trouver la formule du binôme négatif, on utilise cette relation à l'ordre n+1, et en posant x=qt. On trouve, pour $n \geq 2$ et $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$,

$$\begin{array}{lll} \frac{p^{n+1}x^{n+1}}{q^{n+1}(1-x)^{n+1}} & = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_{k-1}^{n} \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}}.x^k & \\ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} & = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_{k-1}^{n} x^{k-1-n} & \text{division par } \frac{P^{n+1}}{q^{n+1}}x^{n+1} \\ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} & = \sum_{j=n}^{+\infty} C_j^n.x^{j-n} & \text{avec } j = k-1 \end{array}$$

Si $x = 0$, la formule est trivialement vraie.

Reste à traiter les deux premiers rangs : au rang n=0 on retrouve la série géométrique et au rang n=1 la série géométrique dérivée.

Existences d'espérances

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles positives, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Démontrer que si X et Y admettent une spérance, alors il en va de même des variables aléatoires

$$Z_1 = max(X,Y) \ , \ Z_2 = \sqrt{XY} \ , \ Z_3 = \frac{XY}{X+Y}$$

On va appliquer le théorème de majoration. Le principe est de trouver une inégalité sur des réels et de la faire passer aux variables aléatoires. Pour Z_1, on remarque que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, max(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$

On peut montrer ce résultat aisément avec une figure...

Puisque X et Y admettent une espérance, il en va de même, par linéarité, de X+Y et X-Y. D'après le théorème de l'espérance et de la valeur absolue, la variable aléatoire —X-Y— admet également une espérance. Par linéarité, max(X,Y) admet une espérance.

Pour Z_2, comme $\sqrt{XY} \leq \sqrt{max(X,Y).max(X,Y)} \leq |max(X,Y)|$ et que max(X,Y) admet une espérance d'après la question précédente, il en va de même de $\sqrt{XY}$.

Enfin, pour Z_3, on se rappelle d'une autre inégalité classique

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \frac{xy}{x+y} \leq \frac{1}{2}.\sqrt{xy}$$

déduite de

$$\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a-b)^2 \geq 0 \implies a^2+b^2 \geq 2ab$$

appliqué en $a = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Ainsi, $Z_3 \leq \frac{1}{2}.Z_2$ et comme la variable aléatoire réelle discrète positive $\frac{1}{2}Z_2$ admet une espérance, la variable aléatoire positive Z_3 en admet également une.

Des sous-espaces vectoriels suivant les moments

On se place dans l'univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On note $\mathcal{L}^0$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{L}^n$ l'ensemble des varaibles aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre n. On va démontrer que $\mathcal{L}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^0$ et que

$$\mathcal{L}^0 \supset \mathcal{L}^1 \supset \mathcal{L}^2 \supset ... \supset \mathcal{L}^n$$

1. Démontrer que pour tous réels positifs x et y
$$0 \leq (\frac{x+y}{2})^n \leq \frac{1}{2}(x^n+y^n)$$
2. Démontrer que si X et Y admettent un moment d'ordre n, alors X+Y aussi. Justifier alors que $\mathcal{L}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^0$.
3. Démontrer que, pour tout réel positif x, $0 \leq x^{n-1} \leq 1+x^n$.
4. En déduire que $\mathcal{L}^n \subset \mathcal{L}^{n-1}$.

---

1. Quitte à intervertir x et y, on suppose que $y \leq x$. A y fixé, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [y, +\infty[, f(x) = (\frac{x+y}{2})^n - \frac{1}{2}(x^n+y^n)$$

est dérivable, de dérivée $f'(x) = \frac{n}{2}(\frac{x+y}{2})^{n-1} - \frac{1}{2}nx^{n-1}$ négative. Ainsi f est décroissante. Comme f est nulle en y, on en déduit qu'elle est négative sur $[y, +\infty[$, d'où le résultat.

2. D'après la question précédente,

$$|(\frac{X+Y}{2})^n| \leq (\frac{|X|+|Y|}{2})^n \leq \frac{1}{2}(|X|^n+|Y|^n)$$

Si, par hypothèse, X^n et Y^n admettent une espérance, il en va de même de $|X|^n$ et $|Y|^n$ (d'après le théorème de l'espérance sur la valeur absolue). D'après le théorème de majoration, $(\frac{X+Y}{2})^n$ admet donc une espérance, et par linéarité $(X+Y)^n$ également.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'espérance, si X^n admet une espérance, alors $\lambda^n X^n$ en admet une, donc λX admet un moment d'ordre n.

Ainsi $\mathcal{L}^n$ est stable par l'addition et par la multiplication par un scalaire. Il est clairement non vide, inclus dans $\mathcal{L}^0$: c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^0$.

3. Tout comme à la question 1, on démontre cette inégalité en étudiant la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = x^{n-1} - x^n - 1$$

4. Soit $X \in \mathcal{L}^n$. D'après la question précédente,

$$|X|^{n-1} \leq 1 + |X|^n$$

Si X admet un moment d'odre n, —X— également. Par majoration, $|X|^{n-1}$ admet une espérance et donc X^{n-1} également. Bref $X \in \mathcal{L}^{n-1}$ et donc $\mathcal{L}^n \subset \mathcal{L}^{n-1}$.

24.3 Exercices plus complets

Quatrième partie

Géométrie

Chapitre 25

Géométries affine, planaire, spaciale

25.1 Géométrie Affine

Droites définies par des conditions

Trouver les droites passant par le point $A = (2, 3, 1)$, parallèles au plan $P : 2x - 5y + 4z - 1 = 0$ et sécantes à la droite $D : 2x - y + 1 = z = 0$.

On va commencer par chercher une paramétrisation de D. Écrivant $2x - y + 1 = 0$ sous la forme $y = 2x + 1$, on trouve qu'une représentation paramétrique de D est $(x = t, y = 2t+1, z = 0)$. Si Δ est une droite passant par A et sécante à D, alors il existe t dans $\mathbb{R}$ tel que, posant $M(t) = (t, 2t+1, 0)$, la droite Δ est la droite $(AM(t))$. En particulier, Δ a pour vecteur directeur $(t - 2, 2t - 2, -1)$. Il faut ensuite que Δ soit parallèle à P. Pour cela, on cherche deux vecteurs directeurs de P, en transformant son équation :

$$2x - 5y + 4z - 1 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{5}{2}y - 2z + \frac{1}{2} \\ y & = & y \\ z & = & z \end{array} \right.$$

Deux vecteurs directeurs (non colinéaires) de P sont donc $(5/2, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$. La droite Δ est parallèle à P si et seulement si le déterminant de ces trois vecteurs est non-nul. Or, le déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -2 & t-2 \\ 1 & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4t - 1$$

Ceci est nul pour $t = 1/4$, et on trouve le vecteur directeur $(-7/4, -3/2, -1)$, soit encore $(7, 6, 4)$. Il y a donc une unique droite solution, d'équation paramétrique $(x = 2 + 7u, y = 3 + 6u, z = 1 + 4u)$.

25.2 Géométrie Elémentaire du Plan

25.2.1 Droites

Différents types d'équation de droite

1. Donner une équation cartésienne de la droite
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t. \end{cases}$$
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d'équation $2x - 3y = 4$.
3. Donner une équation polaire de la droite précédente.
4. Quel est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite d'équation polaire $r = \frac{2}{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}$?

---

1. La deuxième équation nous donne $t = 1 - y$. En remplaçant dans la première, on trouve $x = 3 + 2 - 2y$. Une équation cartésienne est donc $x + 2y = 5$.
2. Notons D la droite. On a
$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} x = \frac{3y}{2} + 2 \\ y = y. \end{cases}$$
Une représentation paramétrique de D est donc
$$\begin{cases} x = \frac{3t}{2} + 2 \\ y = t. \end{cases}$$
3. On part de l'équation cartésienne. Si (x, y) désignent les coordonnées cartésiennes et (r, θ) désignent les coordonnées polaires, on a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, donc l'équation cartésienne devient en polaire :
$$2r\cos\theta - 3r\sin\theta = 4 \iff r = \frac{4}{2\cos\theta - 3\sin\theta}.$$
4. La droite a pour équation $\sqrt{3}r\cos\theta + r\sin\theta = 2$, soit $\sqrt{3}x + y = 2$. Un vecteur directeur est donc le vecteur $\vec{u} = (-1, \sqrt{3})$. On a
$$\cos(\vec{u}, \vec{e}_1) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_1}{\|u\| \cdot \|\vec{e}_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
L'angle recherché est donc $\arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6 \mod \pi$.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1,1)$, $B(3,-1)$ et $C(1,4)$. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

On commence par déterminer l'équation de la droite (AB). Le point $M(x,y)$ est élément de (AB) si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})=0 \iff 4(y-1)+2(x+1)=0 \iff x+2y-1=0.$$

On détermine ensuite l'équation de la perpendiculaire à (AB) passant par C. Le point $M(x,y)$ appartient à cette droite si et seulement si

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}=0 \iff 4(x-1)-2(y-4)=0 \iff 2x-y+2=0.$$

Le point H est le point d'intersection de ces deux droites. On résoud le système et on trouve $H(-3/5,4/5)$.

A angle donné

Soit D la droite d'équation $3x-2y+5=0$. Déterminer une équation de la droite Δ qui passe par le point $A(1,2)$ et qui fait un angle de $\pi/6$ avec D.

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}=(2,3)$, soit en notation complexe $2+3i$. Un vecteur directeur de Δ est l'image par la rotation d'angle $\pi/6$ de ce vecteur. Il est donc d'affixe $e^{i\pi/6}(2+3i)=(2\sqrt{3}-3)/2+i(3\sqrt{3}+2)/2$. Une équation de la droite recherchée est donc de la forme $-(3\sqrt{3}+2)x+(2\sqrt{3}-3)y=k$. Puisqu'elle passe par k, on a $k=\sqrt{3}-8$.

Famille de droites tangentes à un cercle

Montrer que les droites D_λ d'équation cartésienne

$$D_\lambda:(1-\lambda^2)x+2\lambda y=4\lambda+2,$$

où λ désigne un paramètre réel, sont toutes tangentes à un cercle fixe à préciser.

On commence par dessiner les droites correspondant à $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$. Pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$, on obtient les droites $y = 1$ et $y = 3$, donc les cercles tangents aux deux droites sont ceux dont le centre est sur la droite $y = 1$ et de rayon 1. Le cas $\lambda = 0$ donne la droite $x = 2$, ce qui fait que les deux seuls centres possibles sont les points $A(1,1)$ et $B(3,1)$. Calculons maintenant la distance de A à la droite D_λ. Elle vaut

$$\frac{|(1-\lambda^2)\times 1 + 2\lambda \times 1 - 4\lambda - 2|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2}} = \frac{|(\lambda^2+1)^2|}{\sqrt{1+2\lambda^2+\lambda^4}} = 1.$$

Ainsi, toutes les droites D_λ sont tangentes au cercle de centre A et de rayon 1.

Coordonnées de symétriques

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan et Δ la droite d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées du symétrique de M par rapport à Δ.
2. Donner le lieu des points M_0 tels que les trois symétriques de M_0 par rapport aux deux axes de coordonnées et à Δ soit alignés.

---

1. Cherchons une équation de la perpendiculaire à Δ passant par M_0. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u} = (-a, b)$ (on a multiplié l'équation par ab). Si on note (D) cette perpendiculaire, alors on a

$$M(x,y) \in D \iff \overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{u} = 0 \iff -a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

On cherche ensuite les coordonnées du projeté orthogonal de M_0 sur Δ. C'est le point d'intersection de (D) et de Δ. On résoud le système et on trouve le point $M_1(x_1, y_1)$ de coordonnées

$$x_1 = \frac{ab^2 - aby_0 + a^2x_0}{a^2+b^2} \text{ et } y_1 = \frac{a^2b - abx_0 + b^2y_0}{a^2+b^2}.$$

Le point $M_2(x_2, y_2)$ recherché vérifie $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\overrightarrow{M_0M_1}$. On obtient donc

$$x_2 = \frac{2ab^2 - 2aby_0 + (a^2-b^2)x_0}{a^2+b^2} \text{ et } y_1 = \frac{2a^2b - 2abx_0 + (b^2-a^2)y_0}{a^2+b^2}.$$

2. On note $M_3(x_0, -y_0)$ le symétrique de M_0 par rapport à l'axe des ordonnées, et $M_4(-x_0, y_0)$ le symétrique de M par rapport à l'axe

des abscisses. La condition d'alignement se traduit par la nullité du déterminant :

$$\det(\overrightarrow{M_3M_4}, \overrightarrow{M_3M_2}) = 0.$$

Après calcul, on trouve $x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - by_0 = 0$. C'est l'équation d'un cercle (on peut prouver qu'il passe par l'origine et par les points d'intersection de Δ avec les axes de coordonnées).

Configuration

On fixe trois points O, A, B non alignés. À tout point M du plan distinct de O, A et B, on associe les points $P \in (OA)$ et $Q \in (OB)$ tels que $OMPQ$ est un parallélogramme. On suppose que les droites (AQ) et (BP) sont sécantes en M'. Montrer que (MM') passe par un point fixe que l'on précisera.

Un dessin ou l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique suggèrent que les points M, M' et C sont alignés, avec C de sorte que $OACB$ soit un parallélogramme. On travaille alors dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, et on définit $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que les coordonnées respectives de P et Q soient $P(b, 0)$ et $Q(0, a)$. On va chercher les coordonnées de M'. Une équation paramétrique de la droite (AQ) est :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -\lambda + 1 \\ y & = & \lambda a \end{array} \right.$$

De même, une équation paramétrique de la droite (BP) est :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \mu b \\ y & = & -\mu + 1 \end{array} \right.$$

On résoud ce système et on trouve par exemple $\mu = \frac{a-1}{ab-1}$. Les coordonnées de C sont donc :

$$C = \left(\frac{b(a-1)}{ab-1}, \frac{a(b-1)}{ab-1} \right).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{M'C}$ et $\overrightarrow{CM}$ ont donc pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{M'C} = \left(\frac{b-1}{ab-1}, \frac{a-1}{ab-1} \right) \text{ et } \overrightarrow{CM} = (b-1, a-1).$$

Ils sont clairement colinéaires, ce qui prouve bien que les points M, M' et C sont alignés.

25.2.2 Cercles

Cercle sous contraintes

Soit $A(0,0)$, $B(2,1)$ et $C(2,3)$.

1. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

---

1. Le point $M(x,y)$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$. Or,

   $$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \iff (x-0)(x-2)+y(y-1)=0 \iff x^2-2x+y^2-y=0.$$

   Le cercle recherché a pour équation $x^2+y^2-2x-y=0$.
2. L'équation générale d'un cercle est $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Utilisons que les points A, B et C doivent appartenir à ce cercle. On trouve successivement $c=0$, $-4a-2b+5+c=0$, $-4a-6b+13+c=0$, soit, après résolution du système, $a=1/4$, $b=2$ et $c=0$. Une équation du cercle est donc $x^2+y^2-\frac{1}{2}x-4y=0$.

Équation de la tangente

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(a,b)$ et de rayon R. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ pour que la droite d'équation $ux+vy+w=0$ soit tangente à $\mathcal{C}$.

Notons (D) cette droite. Elle est tangente au cercle si et seulement si la distance de I à (D) vaut R. Utilisant les formules du cours, c'est vrai si et seulement si

$$|au+bv+w|=R\sqrt{u^2+v^2}.$$

Lieu

Déterminer l'ensemble des centres des cercles qui passent par le point $A(1,0)$ et qui possèdent deux tangentes perpendiculaires qui se coupent en O

Soit $I(a,b)$ un tel cercle et soit R son rayon. Son équation est donc $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$. Comme il passe par A, on doit avoir $(1-a)^2+b^2 = R^2$. Considérons une droite (D) passant par l'origine, et distincte des axes de coordonnées. Une telle droite a pour équation $y = mx$. Si elle est tangente au cercle, alors on a

$$\mathrm{dist}^2\big(I,(D)\big) = R^2 \iff \frac{(ma-b)^2}{1+m^2} = R^2 = (1-a^2)+b^2.$$

Ceci s'écrit encore

$$(2a-b^2-1)m^2 - 2abm - (1-a)^2 = 0.$$

On veut que deux droites perpendiculaires soient tangentes au cercle. L'équation précédente doit avoir deux solutions distinctes et le produit des racines doit être égal à -1. En effet, deux droites $y = mx$ et $y = m'x$ sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$. On doit donc avoir $2a - b^2 - 1 \neq 0$, et

$$\frac{-(1-a)^2}{2a-b^2-1} = -1$$

(remarquons que si le produit des deux racines vaut -1, les deux racines seront nécessairement réelles, puisque sinon on obtiendrait deux racines complexes conjuguées dont le produit serait un réel strictement positif, le carré de leur module). Cette dernière équation se réécrit

$$a^2+b^2-4a = -2 \iff (a-2)^2+b^2 = 2 = \sqrt{2}^2.$$

Le point $I(a,b)$ décrit donc le cercle de centre $(2,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$, privé des points $(1,-1)$ et $(1,1)$ pour lesquels $2a-b^2-1 = 0$. Mais ces points conviennent aussi, car les tangentes sont alors les axes de coordonnées, qui sont bien entendus perpendiculaires.

25.2.3 Triangles

Orthocentre

Soit $A(-1,1)$, $B(3,-1)$ et $C(1,4)$. Déterminer une équation cartésienne de chacune des hauteurs du triangle. Vérifier qu'elles sont concourantes et déterminer l'orthocentre du triangle.

Un point $M(x,y)$ est sur la hauteur issue de A si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$. Ceci s'écrit analytiquement ;

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \iff -2(x+1)+5(y-1) = 0 \iff -2x+5y-7 = 0.$$

De même, la hauteur issue de B a pour équation

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff 2(x-3) + 3(y+1) = 0 \iff 2x + 3y - 3 = 0.$$

De même, la hauteur issue de C a pour équation

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff 4(x-1) - 2(y-4) = 0 \iff 2x - y + 2 = 0.$$

On cherche le point d'intersection des deux premières hauteurs en écrivant le système des deux équations. On trouve $H(-3/8, 5/4)$. Comme H vérifie aussi l'équation de la troisième hauteur, on vérifie bien qu'elles sont concourantes.

Symétrique de l'orthocentre

Montrer que, dans tout triangle, les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit au triangle.

On note ABC le triangle, H l'orthocentre, et K le symétrique de H par rapport à (BC). Il suffit de démontrer que A, B, C et K sont cocycliques, par exemple en vérifiant que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) \mod \pi.$$

D'une part, notons B' le pied de la hauteur issue de B et C' le pied de la hauteur issue de C. Les points B' et C' sont sur le cercle de diamètre $[AH]$. On a donc, par le théorème de l'arc capable (théorème de l'angle inscrit) :

$$(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}) = (\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HB'}) \mod \pi.$$

Ceci donne encore :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}) = (\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HB'}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) \mod \pi.$$

D'autre part, par symétrie, on a

$$(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) \mod \pi.$$

Ceci donne le résultat voulu.

Distance d'un point aux côtés dans un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point situé à "l'intérieur" de ce triangle. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est indépendante de M.

Voici une solution élégante, suggérée par un lecteur du site. On découpe l'aire du triangle ABC en 3 :

$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(ABM) + \text{aire}(BMC) + \text{aire}(CMA).$$

Or, on a

$$\text{aire}(ABM) = AB \times \text{dist}(M, (AB)).$$

De même on a

$$\text{aire}(BMC) = BC \times \text{dist}(M, (AB)) \text{ et } \text{aire}(CMA) = AC \times \text{dist}(M, (AC)).$$

Puisque $AB = BC = CA$, on trouve finalement que

$$\text{aire}(ABC) = AB \times \big(\text{dist}(M, (AB)) + \text{dist}(M, (BC)) + \text{dist}(M, (AC))\big)$$

ce qui donne le résultat voulu.
On peut aussi donner une solution plus analytique en partant de la formule :

$$d\big(M, (AB)\big) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

On note c la longueur des côtés du triangle. De plus, puisque le point M est situé à l'intérieur du triangle, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ est compris entre 0 et $\pi/3$. En particulier, le déterminant de ces deux vecteurs est positif (on peut revenir à la formule avec le sinus). On en déduit que :

$$d\big(M, (AB)\big) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})}{c}.$$

De même, on a

$$d\big(M, (BC)\big) = \frac{\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM})}{c}.$$

$$d\big(M, (CA)\big) = \frac{\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})}{c}.$$

La somme des distances fait donc :

$$S = \frac{1}{c}\left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}) + \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})\right).$$

On écrit $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$, et par bilinéarité du déterminant, on trouve

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{c}\big(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}) + \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}) + \\ &\quad \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA})\big) \\ &= \frac{1}{c}\Big(\det(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\Big) \\ &= \frac{\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}{c} \\ &= \frac{c^2 \sin(\pi/3)}{c} \\ &= \frac{c\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

25.3 Géométrie Elémentaire de l'Espace

25.3.1 Repérage

D'un système de coordonnées à l'autre
Déterminer les coordonnées cylindriques puis sphériques du point $M(2, 2\sqrt{3}, 4)$.

Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy). m a pour coordonnées $(2, 2\sqrt{3}, 0)$. En particulier, on a $Om = \sqrt{4 + 4 \times 3} = 4$, et on a

$$\overrightarrow{Om} = 4\left(\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = 4\big(\cos(\pi/3)\vec{\imath} + \sin(\pi/3)\vec{\jmath}\big).$$

Les coordonnées cylindriques de M sont donc $(4, \pi/3, 4)$.
Pour déterminer les coordonnées sphériques, il faut en plus déterminer la longueur OM et une mesure de l'angle $(\vec{k}, \overrightarrow{OM})$. Mais on a $OM = 4\sqrt{2}$, et l'angle $(\vec{k}, \overrightarrow{OM})$ est compris entre 0 et π. Puisque

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}}{\|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\vec{k}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

on en déduit que l'angle fait $\pi/4$. Les coordonnées sphériques de M sont donc $(4\sqrt{2}, \pi/3, \pi/4)$.

Distance terrestre

La terre étant assimilée à une sphère de rayon R, calculer la distance "à vol d'oiseau" entre le point A de longitude θ_1 et de latitude ϕ_1 et le point B de longitude θ_2 et de latitude ϕ_2. On rappelle que cette distance est donnée par la longueur de l'arc de cercle intersection de la sphère et du plan OAB. Application numérique : Calculer la distance entre Paris (48 ° 49'N, 2 ° 19'E) et Buenos Aires (34 ° 40'S, 58 ° 30'W). On prendra $R = 6378$.

Soit α l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Alors la distance recherchée est $R\alpha$. Par ailleurs, le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ est égal à $R^2\cos(\alpha)$. Reste à calculer ce produit scalaire ce que l'on va faire en écrivant les coordonnées cartésiennes des points. On a en effet :

$$A\begin{pmatrix} R\cos\phi_1\cos\theta_1 \\ R\cos\phi_1\sin\theta_1 \\ R\sin\phi_1 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} R\cos\phi_2\cos\theta_2 \\ R\cos\phi_2\sin\theta_2 \\ R\sin\phi_2 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= R^2\left(\cos\phi_1\cos\phi_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2\right) \\ &= R^2\left(\cos\phi_1\cos\phi_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \sin\phi_1\sin\phi_2\right). \end{aligned}$$

La distance recherchée vaut donc

$$d = R\arccos\left(\cos\phi_1\cos\phi_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \sin\phi_1\sin\phi_2\right).$$

Pour l'application recherchée, on a

$$\theta_1 = 48,82\text{deg et } \phi_1 = 2,32\text{deg}$$

(attention de bien convertir les minutes d'angle en fraction de degré, sachant que 60 minutes vaut un degré), et

$$\theta_2 = -34,66\text{deg} \ \text{ et } \phi_2 = -58,5\text{deg}$$

(ici, il faut faire attention au fait que la latitude est comptée vers le sud, et la longitude vers l'ouest). Le calcul donne une distance d'environ 11070 kilomètres.

25.3.2 Produit vectoriel, déterminant, produit mixte

Fabrication d'une base orthonormale

Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(1, 2, 2)$.

On commence par normer le vecteur donné. Un vecteur unitaire colinéaire à $(1, 2, 2)$ est $\vec{u} = (1/3, 2/3, 2/3)$. On cherche ensuite un vecteur orthogonal à celui-là. Le vecteur $(0, 1, -1)$ en est un. On le norme en $\vec{v} = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Puis on forme leur produit vectoriel, et on trouve

$$\vec{w} = \left(\frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale directe.

Vecteurs coplanaires

Pour quelles valeurs de a les vecteurs $(1, 0, a)$, $(a, 1, 0)$ et $(0, a, 1)$ sont-ils coplanaires ?

Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte (ou déterminant) est nul. On calcule donc ce déterminant dans ce cas précis :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1.$$

Cette quantité s'annule si et seulement si $a = -1$. Les vecteurs sont donc coplanaires si et seulement si $a = -1$.

Division vectorielle

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation vectorielle d'inconnue $\vec{x}$ $\quad \vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$.

1. Montrer que si l'équation admet une solution, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
   On supposera dans la suite que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2. Déterminer toutes les solutions colinéaires à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.

4. Déterminer les vecteurs solutions qui vérifient en outre $\vec{x} \cdot \vec{w} = a$.

---

1. Supposons que l'équation admette une solution $\vec{x}$. Alors
$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{u} = 0$$
puisque $\vec{u} \wedge \vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}$.
2. Posons $x = k\vec{u} \wedge \vec{v}$ et calculons $\vec{u} \wedge \vec{x}$:
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{x} &= k \quad \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &= \quad k\big((\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v}\big) \\ &= \quad -k\|u\|^2\vec{v} \end{aligned}$$
où on a utilisé la formule du double produit vectoriel. On a donc $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ si et seulement $k = -\frac{1}{\|u\|^2}$. Il existe donc une solution unique colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
3. Soit $\vec{x}_0$ la solution particulière précédente et soit $\vec{x}$ une solution de l'équation. Alors, de $\vec{u} \wedge \vec{x}_0 = \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ on tire
$$\vec{u} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$$
ce qui entraine que $x = x_0 + \lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, on vérifie facilement que tout vecteur s'écrivant $\vec{x}_0 + \lambda\vec{u}$ est solution.
4. On introduit la solution précédente dans la nouvelle équation, et on trouve que λ doit vérifier
$$\vec{x}_0 \cdot \vec{w} + \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} = a.$$
On distingue alors deux cas :
   — Si $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, on a une unique solution donnée par
$$\lambda = \frac{a - \vec{x}_0 \cdot \vec{w}}{\vec{u} \cdot \vec{v}}.$$
   — Si au contraire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors on n'a pas de solution si $a \neq \vec{x}_0 \cdot \vec{w}$, ou au contraire tous les éléments de la forme $x_0 + \lambda\vec{u}$ sont solutions si $a = \vec{x}_0 \cdot \vec{w}$.

Quelques formules

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs de l'espace. Prouver successivement les formules suivantes :

1. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} + (\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{a} + (\vec{c} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{0}$;
2. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right] \vec{b} - \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right] \vec{a}$;
3. $\left[\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]^2$.

---

1. On utilise (trois fois !) la formule du double-produit vectoriel :
$$\begin{array}{rcl}(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} &=& (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \\ (\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{a} &=& (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \\ (\vec{c} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} &=& (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}\end{array}$$
Lorsqu'on réalise la somme de ces termes, on trouve bien le vecteur nul (on rappelle que le produit scalaire est commutatif, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$).
2. On utilise à nouveau la formule du double produit vectoriel :
$$\begin{array}{rcl}(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) &=& \left(\vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})\right) \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})\right) \vec{a} \\ &=& \left[\vec{c}, \vec{d}, \vec{a}\right] \vec{b} - \left[\vec{c}, \vec{d}, \vec{b}\right] \vec{a} \\ &=& \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right] \vec{b} - \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right] \vec{a},\end{array}$$
où la dernière ligne vient de l'invariance par rotation circulaire du produit mixte.
3. On a
$$\left[\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}\right] = \left((\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})\right) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}).$$
On utilise alors le résultat de la question précédente, et on trouve :
$$\begin{array}{rcl}\left[\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}\right] &=& \left([\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{b} - [\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{a}\right) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) \\ &=& \left([\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{b}\right) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) \\ &=& [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^2.\end{array}$$

25.3.3 Droites et plans

Équation d'un plan donné par deux vecteurs directeurs

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1, 0, 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

Il y a plusieurs méthodes, la plus rapide étant de remarquer que $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Les coordonnées de $\vec{n}$ sont $(1, -1, 1)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} \quad &\iff \quad \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \\ &\iff \quad 1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-1) = 0 \\ &\iff \quad x - y + z - 2 = 0. \end{aligned}$$

D'un type d'équation à l'autre

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Donner une équation cartésienne du plan paramétré par
$$\begin{cases} x = & 1 + t + 2u \\ y = & 2 + t + u \\ z = & 3u. \end{cases}$$
2. Donner une représentation paramétrique du plan d'équation $x + 2y - z - 3 = 0$.
3. Donner un système d'équations définissant la droite dont une paramétrisation est :
$$\begin{cases} x = & 4t + 5 \\ y = & 3t + 1 \\ z = & t + 3. \end{cases}$$
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite donnée par le système d'équation :
$$\begin{cases} x + y - 3z + 1 & = 0 \\ 2x + y - 5z & = 0. \end{cases}$$

---

1. Il y a deux méthodes possibles. La première consiste à exprimer les paramètres en fonction des coordonnées. Ainsi, si on note $\mathcal{P}$ le plan,

on a :

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in\mathcal{P} &\iff \exists (t,u)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = & 1+t+2u \\ y = & 2+t+u \\ z = & 3u. \end{cases} \\
&\iff \exists (t,u)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x-y & = -1+u \\ y & = 2+t+u \\ z & = 3u \end{cases} \\
&\iff \exists (t,u)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} u = & x-y+1 \\ t = & y-2-u=-x+2y-3 \\ z = & 3u = 3x-3y+3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Une équation cartésienne du plan est donc $3x-3y-z+3=0$.
L'autre méthode consiste à remarquer que $\vec{u}=(1,1,0)$ et $\vec{v}=(2,1,3)$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est donc $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=(3,-3,-1)$. Une équation du plan $\mathcal{P}$ est alors de la forme $3x-3y-z+d=0$. On détermine d en remarquant que le point $A(1,2,0)$ appartient à $\mathcal{P}$. On trouve finalement $d=3$.

2. Il suffit de choisir deux coordonnées comme paramètres. Notons $\mathcal{P}_1$ le plan. On a

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in\mathcal{P}_1 &\iff x=-2y+z+3 \\
&\iff \begin{cases} x = & -2y+z+3 \\ y = & y \\ z = & z \end{cases}
\end{aligned}
$$

Une représentation paramètrique de $\mathcal{P}_1$ est donc donnée par

$$
\begin{cases} x = & -2t+u+3 \\ y = & t \\ z = & u. \end{cases}
$$

3. La dernière équation donne $t=z-3$. On remplace dans les deux autres pour trouver un système d'équations :

$$
\begin{cases} x = & 4z-7 \\ y = & 3z-7 \end{cases} \iff \begin{cases} x-4z+7 = & 0 \\ y-3z+7 = & 0. \end{cases}
$$

4. On choisit une des coordonnées comme paramètres, et on utilise la méthode du pivot pour exprimer les deux autres coordonnées en fonc-

tion de ce paramètre. Notant (D) la droite, on a

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in(D) \quad &\iff \quad \begin{cases} x+y-3z+1 &= 0 \\ 2x+y-5z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x+y-3z+1 &= 0 \\ x-2z-1 &= 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x = & 2z+1 \\ y = & -x+3z-1 = z-2 \\ z = & z. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Une représentation paramétrique de (D) est donc donnée par

$$
\begin{cases} x = & 2t+1 \\ y = & -x+3z-1 = t-2 \\ z = & t. \end{cases}
$$

Autour de deux plans

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère P d'équation $x-y+z=2$ et P' d'équation $x+2y+3z=4$.

1. Vérifier que P et P' ne sont pas parallèles, puis donner un système d'équations paramétriques de la droite d intersection de P et P'.
2. Donner une équation du plan P'' perpendiculaire à d et passant par le point A de coordonnées $(1,0,-1)$.
3. Montrer sans aucun calcul que les trois plans P, P', P'' sont concourants.
4. Préciser les coordonnées du point B commun à P, P' et P''.

---

1. P et P' ne sont pas parallèles car ils ont des vecteurs normaux non proportionnels. Un vecteur directeur de d s'obtient en effectuant le produit vectoriel de $(1,-1,1)$ et $(1,2,3)$ qui vaut $(-5,-2,3)$; donc d admet les équations paramétriques $(x=-5t+a, y=-2t+b, z=3t+c)$. On détermine les constantes (a,b,c) en résolvant le système :

$$
\begin{cases} (-5t+a)-(-2t+b)+(3t+c) &= 2 \\ (-5t+a)+2\times(-2t+b)+3\times(3t+c) &= 4 \end{cases}
$$

qui signifie que le point (a,b,c) est à la fois sur P et P'. Il y a une infinité de solutions possibles, par exemple $(1,0,1)$.

2. Le vecteur directeur $(-5, -2, 3)$ de d est un vecteur normal de P'', ce qui signifie que P'' a une équation de la forme $-5x - 2y + 3z = d$, où il reste à déterminer la constante d. On écrit que A est sur P'' et on trouve $d = -8$.
3. Les points communs à P et P' sont les points de d, qui coupe P'' : P, P' et P'' sont concourants.
4. On introduit l'équation paramétrique de d dans l'équation de P'' : la résoudre nous donne la valeur du paramètre t, et les coordonnées de B sont $(34/19, 6/19, 10/19)$.

Autour de deux droites

On donne deux droites d et d' de l'espace par des systèmes d'équations paramétriques dans un repère orthonormé :

$$d : (x = t + 1, y = 2t + 1, z = -t - 3) \text{ et } d' : (x = 2t, y = t - 4, z = 3t + 2).$$

1. Est-ce que d et d' sont parallèles ?
2. Déterminer les équations du plan P contenant d et parallèle à d', et du plan P' contenant d' et parallèle à d. En déduire que d et d' ne sont pas concourantes.
3. Déterminer une équation du plan P'' passant par l'origine et orthogonal à d, puis en déduire les coordonnées du point M intersection de P'' et de d.
4. Montrer sans calculs que P'' et P' ont une intersection non-vide.

---

1. d et d' ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas proportionnels.
2. Le vecteur normal $\vec{w}$ de P est à la fois normal au vecteur directeur $(1, 2, -1)$ de d et au vecteur directeur $(2, 1, 3)$ de d' : on peut donc choisir pour $\vec{w}$ le produit vectoriel $(7, -5, -3)$ des deux précédents vecteurs. P a donc pour équation $7x - 5y - 3z = k$, et on détermine la constante k en écrivant que le point (1,1,-3) de d est sur P, soit $k = 11$. On fait la même chose pour P', et on trouve l'équation $7x - 5y - 3z = 14$. Si les droites d et d' étaient concourantes, les deux plans P et P' seraient égaux (unique plan qui contient deux droites concourantes). Or, les plans ici sont distincts !
3. Puisque P'' est normal à d, son vecteur normal est un vecteur directeur de d, et puisque P'' passe par l'origine, son équation est sans terme constant. C'est donc $x + 2y - z = 0$. On obtient le point commun en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de t dans cette équation, et on trouve : $t = -1$, d'où $M : (0, -1, -2)$.

4. Puisque P et P' sont clairement parallèles, et puisque P et P'' sont normaux, P' et P'' sont normaux, donc non-parallèles.

Droites passant par et coupant...

Déterminer les droites de l'espace passant par $A(1,2,3)$ et coupant les droites

$$\Delta_1 \ : \ x+y+z-2 = x-y-z+3 = 0$$
$$\Delta_2 \ : \ 2(x-1) = z-3 = 4(y-1).$$

On commence par obtenir une équation paramétrique de Δ_2, en écrivant que

$$(x,y,z)\in\Delta_2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x\\ y &=& \frac{x-1}{2}+1\\ z &=& 2x+1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0+x\\ y &=& \frac{1}{2}+\frac{x}{2}\\ z &=& 1+2x.\end{array}\right.$$

Soit $M(t)$ le point de coordonnées $(t,(1+t)/2,1+2t)$. Une droite passe par A et coupe Δ_2 si et seulement s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que cette droite passe par A et $M(t)$. Ces droites ont pour équation paramétrique

$$\begin{array}{rcl} x &=& 1+\lambda(t-1)\\ y &=& 2+\lambda\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{2}\right)\\ z &=& 3+\lambda(2t-2).\end{array}$$

On écrit maintenant que cette droite doit couper Δ_1, donc qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$x+y+z-2=0 \iff 4+\lambda\left(\frac{7t-9}{2}\right)=0$$

et

$$x-y-z+3=0 \iff -1+\lambda\left(\frac{-3t+5}{2}\right)=0.$$

On résoud ce système en λ et t, et on trouve que nécessairement $t=11/5$. Ainsi, il n'existe qu'une seule droite passant par A et coupant Δ_1 et Δ_2 : il s'agit de la droite d'équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+\frac{6}{5}\lambda\\ y &=& 2-\frac{2}{5}\lambda\\ z &=& 3+\frac{12}{5}\lambda.\end{array}\right.$$

Projeté orthogonal

Déterminer le projeté orthogonal H du point $M(u, v, w)$ sur le plan $\mathcal{P}$ déterminé par les trois points $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 5)$ et $C(2, 3, 4)$.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, de coordonnées $(-3, 3, 0)$, ou encore, pour que les équations soient plus simples à écrire, le vecteur $(1, -1, 0)$ qui lui est colinéaire. Une équation de $\mathcal{P}$ est donc de la forme $x - y + d = 0$, et puisque A est élément du plan, on obtient $1 - 2 + d = 0 \implies d = 1$. La perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M a pour vecteur directeur un vecteur normal du plan, comme $(1, -1, 0)$. Comme elle passe par M, elle admet pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= u + t \\ y &= v - t \\ z &= w. \end{cases}$$

L'intersection de cette droite et du plan $\mathcal{P}$ est le projeté orthogonal recherché. On introduit l'équation paramétrique de la droite dans celle du plan, et on trouve :

$$u + t - v + t + 1 = 0 \implies t = \frac{-u + v - 1}{2}.$$

On en déduit les coordonnées de H :

$$x_H = u + \frac{-u + v - 1}{2} = \frac{u + v - 1}{2} \quad y_H = v - \frac{-u + v - 1}{2} = \frac{u + v + 1}{2} \quad z_H = w.$$

Perpendiculaire commune

Déterminer la perpendiculaire commune à $(D1)$ et $(D2)$, puis la distance de $(D1)$ à $(D2)$ lorsque

1. $(D1)$ est la droite donnée par la représentation paramétrique $(x = 3 + 2t, y = 1 + t, z = 2 - t)$ et $(D2)$ est la droite donnée par le système d'équations cartésiennes $(3x + 2y + 4z + 8 = 0,\ x + y + z = 0)$.
2. $(D1)$ est la droite d'équation $(x + z = 2,\ y = -1)$ et $(D2)$ est la droite d'équation $(y - z + 1 = 0,\ x + y = 0)$.

Rappelons la méthode générale pour trouver une perpendiculaire commune à deux droites $(D1)$ et $(D2)$ de l'espace non parallèles. On détermine dans l'ordre :

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de $(D1)$ et $(D2)$;

— $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$;
— $P1$ le plan contenant $(D1)$ et donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur ;
— B l'intersection de $P1$ et $(D2)$.

La perpendiculaire commune de $(D1)$ et $(D2)$ est la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{n}$.

1. On a successivement
   — $\vec{u} = (2, 1, -1)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
   — $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$;
   — Le point $A(3, 1, 2)$ est un point de $(D1)$ et $P1$ est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a donc $M(x, y, z) \in P1$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.(\vec{u} \wedge \vec{n}) = 0$. Une équation de $P1$ est donc $2x - 5y - z + 1 = 0$.
   — Les coordonnées du point B intersection de $P1$ et $(D2)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} 2x - 5y - z &= -1 \\ 3x + 2y + 4z &= -8 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$$

   La résolution du système donne $B(3, -5/2, -11/2)$.

   La perpendiculaire commune (Δ) a donc pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= -5/2 \\ z &= \frac{-11}{2} + 2t \end{cases}$$

   Finalement, pour calculer la distance de $(D1)$ à $(D2)$, on cherche les coordonnées de A l'intersection de $(D1)$ et (Δ). On trouve $A(6, 5/2, 1/2)$. Finalement, la distance recherchée est $AB = 3\sqrt{5}$.

2. On reprend la même méthode et on trouve :
   — $\vec{u} = (-1, 0, 1)$ et $\vec{v} = (1, -1, -1)$;
   — $\vec{n} = (1, 0, 1)$;
   — $P1$ d'équation $y = -1$.
   — $B(1, -1, 0)$.

   La perpendiculaire commune (Δ) a donc pour équation paramétrique $(x = 1 + t, y = -1, z = t)$. Le point A d'intersection de $(D1)$ et (Δ) a pour coordonnées $A(3/2, -1, 1/2)$. La distance de $(D1)$ à $(D2)$ est donc $AB = \sqrt{2}/2$.

Coplanaires ?

Soient (D_1) et (D_2) les droites d'équation respectives :

$$(D_1) : \begin{cases} x+y & = 2 \\ y-2z & = 3 \end{cases} \qquad (D_2) : \begin{cases} x+y+z & = 1 \\ x-2y+3z & = a \end{cases}$$

1. (D_1) et (D_2) sont-elles parallèles ?
2. Déterminer a pour qu'elles soient coplanaires. Donner alors les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2) et une équation du plan contenant (D_1) et (D_2).

---

1. Cherchons un vecteur directeur de (D_1) et de (D_2). (D_1) est défini comme intersection de deux plans. Un vecteur normal au premier plan est $\vec{n}_1 = (1,1,0)$. Un vecteur normal au deuxième plan est $\vec{n}_2 = (0,1,-2)$. Un vecteur directeur de (D_1) est alors $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (-2,2,1)$. De la même façon, on trouve qu'un vecteur directeur de (D_2) est $\vec{v} = (5,-2,-3)$. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
2. Puisque (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles, elles sont coplanaires si et seulement si elles admettent un point d'intersection. Il faut donc que le système d'équation
$$\begin{cases} x+y & = 2 \\ y-2z & = 3 \\ x+y+z & = 1 \\ x-2y+3z & = a \end{cases}$$
admette une solution. Or, en retranchant la première équation à la troisième, on trouve que ce système est équivalent à :
$$\begin{cases} x+y & = 2 \\ y-2z & = 3 \\ z & = -1 \\ x-2y+3z & = a \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1 \\ z & = -1 \\ -4 & = a. \end{cases}$$
Les deux droites sont donc coplanaires si et seulement si $a = -4$. Dans ce cas, leur point d'intersection est $A(1,1,-1)$. Le plan qui contient les deux droites passe par A et a pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Un vecteur normal au plan est donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-4,-1,-6)$. Une équation du plan est donc de la forme $4x+y+6z+d=0$. En utilisant que A est un point du plan, on trouve finalement que le plan d'intersection de (D_1) et de (D_2) a pour équation $4x+y+6z+1=0$.

Lieu des milieux

Soit (D) et (D') deux droites de l'espace non-parallèles. Déterminer l'ensemble des milieux des segments $[MN]$, où M décrit (D) et N décrit (D').

Soit $= \vec{u} = (a,b,c)$ un vecteur directeur de (D) et $\vec{v} = (a',b',c')$ un vecteur directeur de (D'). Puisque les droites ne sont pas parallèles, ces vecteurs ne sont pas coplanaires. Soit également $A(u,v,w)$ un point de (D) et $A'(u',v',w')$ un point de (D'). Soit M un point de (D) et soit N un point de (D'). Alors il existe $t,t' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x_M & = u + ta \\ y_M & = v + tb \\ z_M & = w + tc \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_N & = u' + t'a' \\ y_N & = v' + t'b' \\ z_N & = w' + t'c'. \end{cases}$$

Le milieu de $[MN]$ a alors pour coordonnées :

$$\begin{cases} x & = \frac{u+u'}{2} + \frac{t}{2}a + \frac{t'}{2}a' \\ y & = \frac{v+v'}{2} + \frac{t}{2}b + \frac{t'}{2}b' \\ z & = \frac{w+w'}{2} + \frac{t}{2}c + \frac{t'}{2}c'. \end{cases}$$

On reconnait l'équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et passant par le point $C = \big((u+u')/2, (v+v')/2, (w+w')/2\big)$. L'ensemble recherché est donc ce plan $\mathcal{P}$.

Droites concourantes

Soient A, B, C trois points non alignés de l'espace et O un point n'appartenant pas au plan ABC. Soient A', B' et C' les symétriques de O par rapport aux milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

D'après les contraintes imposées par l'énoncé, $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO})$ est un repère de l'espace. On va travailler dans ce repère, où les coordonnées des points données par l'énoncé sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ ont pour coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme ces points sont les milieux de $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$, les points A', B' et C' sont donnés par :

$$A' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons une équation paramétrique de (AA'), dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{AA'} = (1, 1, -1)$:

$$(x, y, z) \in (AA') \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = t \\ y & = t \\ z & = -t. \end{cases}$$

De même, on a

$$(x, y, z) \in (BB') \iff \exists u \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = 1 + u \\ y & = u \\ z & = -u. \end{cases}$$

On cherche si les droites (AA') et (BB') se coupent. Les deux dernières équations donnent $t = u$ et la première donne $t = u = 1/2$. Les droites (AA') et (BB') se coupent donc en $D(1/2, 1/2, -1/2)$. Or le vecteur $\overrightarrow{CD} = (1/2, -1/2, -1/2)$ est tel que $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CD}$. D appartient également à (CC') et les droites sont concourantes.

25.3.4 Angles et distances

Distance à un plan et à une droite
Calculer la distance

1. du point $M(1, 1, 1)$ au plan $\mathcal{P}$ paramétré par :

$$\begin{cases} x = & 1 + 2t - t' \\ y = & 1 - t' \\ z = & 2 + t - t'. \end{cases}$$

2. du point $M(0,2,4)$ à la droite (D) d'équations :

$$\begin{cases} x+y-3z+1 &= 0 \\ 2x+y-5z &= 0. \end{cases}$$

---

1. $\mathcal{P}$ est déterminé par le point $A(1,0,2)$ et les deux vecteurs directeurs $\vec{u}(2,1,1)$ et $\vec{v}(1,1,1)$. La distance de M au plan $\mathcal{P}$ est donc donnée par

$$d = \frac{|\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

2. On commence par chercher une représentation paramétrique de la droite. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in(D) \quad &\iff \quad \begin{cases} x+y-3z+1 &= 0 \\ 2x+y-5z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x+y-3z+1 &= 0 \\ x-2z-1 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = & 2z+1 \\ y = & -x+3z-1 = z-2 \\ z = & z. \end{cases}\end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de (D) est donc donnée par

$$\begin{cases} x = & 2t+1 \\ y = & -x+3z-1 = t-2 \\ z = & t. \end{cases}$$

Un point de la droite est donc $A(1,-2,0)$ et un vecteur directeur est $\vec{u}(2,1,1)$. La distance de M à la droite est alors

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}.$$

Angles dans un tétraèdre régulier

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Montrer que $ACFH$ est un tétraèdre régulier.
2. Calculer l'angle entre deux faces d'un tétraèdre régulier.
3. Dans une molécule de méthane CH_4, calculer l'angle HCH, où C est l'atome de carbone et les deux H sont deux atomes d'hydrogène différents.

---

1. Toutes les arêtes du tétraèdre sont les diagonales de carrés qui ont tous le même côté. Ainsi, elles ont toute la même longueur, à savoir $a\sqrt{2}$ si le cube est de côté a.
2. On peut supposer $a = 1$, et on se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Alors les coordonnées des sommets du tétraèdre sont
$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On doit calculer par exemple l'angle θ entre les plans ACF et AFH. Soit $\vec{u}$ un vecteur normal au premier, et $\vec{v}$ un vecteur normal au second. On a alors
$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$
Or, un vecteur normal à ACF est
$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
tandis qu'un vecteur normal à AFH est
$$\vec{v} = \overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On en déduit $\cos\theta = 1/3$. L'angle recherché est donc $\arccos(1/3)$ (rappelons que, quand on étudie dans l'espace l'angle de deux plans, on trouve toujours un réel dans $[0, \pi/2]$, ce qui justifie le fait d'avoir pris une valeur absolue ci-dessus).
3. Dans une molécule de méthane, l'atome de carbone est au centre d'un tétraèdre dont les sommets sont les atomes d'hydrogène. Soit O le centre de notre tétraèdre,
$$O = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$
L'angle recherché, notons-le α, est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$. On a alors
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OC}\|} = -\frac{1}{3}.$$
On trouve $\alpha \simeq 109{,}5\,^\circ$.

Droite à angle fixé

Déterminer les droites (D) de l'espace faisant un angle de 60 $^\circ$ avec (Ox) et 45 $^\circ$ avec (Oy).

Une suffit de déterminer un vecteur directeur $\vec{u} = (a, b, c)$ d'une telle droite, qu'on peut supposer unitaire, à savoir $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. La condition d'angle avec (Ox) donne

$$\cos(\pi/3) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{i}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{i}\|} = |a|,$$

soit $a = \pm 1/2$. De même, on trouve $b = \pm\sqrt{2}/2$ et la relation $a^2+b^2+c^2 = 1$ donne $c = \pm 1/2$. Suivant les signes choisis, on trouve donc 8 possibilités pour les vecteurs directeurs, mais en fait cela ne donne que 4 droites distinctes, puisque deux vecteurs directeurs opposés correspondent à la même droite.

25.3.5 Sphère et cercles

Équation paramétrique d'un cercle

À tout réel t, on associe le point $M(t)$ de coordonnées $x(t) = \cos t + \sqrt{3}\sin t + 1$, $y(t) = \cos t - \sqrt{3}\sin t + 1$ et $z(t) = -2\cos t + 1$.

1. Calculer $x(t) + y(t) + z(t)$.
2. Calculer $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$.
3. En déduire que $M(t)$ est toujours élément d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

---

1. Un calcul direct prouve que $x(t)+y(t)+z(t) = 3$. Ainsi, le point $M(t)$ est toujours élément du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 3$.
2. Un calcul direct prouve que $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 9$. Ainsi, le point $M(t)$ est toujours élément de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
3. $M(t)$ est toujours sur le cercle $\mathcal{C}$ intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{S}$. Le centre de ce cercle est le projeté orthogonal de O, centre de la sphère, sur le plan $\mathcal{P}$. On cherche donc $A(x, y, z) \in \mathcal{P}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}(x, y, z)$ est colinéaire à $\vec{u}(1, 1, 1)$ (vecteur normal du plan). On trouve $A(1, 1, 1)$. Pour trouver le rayon du cercle, on peut calculer la distance $AM(0)$ par exemple. Puisque $M(0)$ a pour coordonnées $(2, 2, -1)$, on trouve

$AM(0) = \sqrt{6}$. On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle $OAM(0)$, qui est rectangle en A. On trouve à nouveau

$$AM(0)^2 = OM(0)^2 - OA^2 = 9 - 3 \text{ soit } AM(0) = \sqrt{6}.$$

Sphère contenant deux cercles

Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2. \end{cases}$

Soit $\mathcal{S}$ une telle sphère, d'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Comme elle contient le premier cercle, on sait que, si $x^2 + y^2 = 9$, alors $(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2 = R^2$ (on a pour le premier cercle $z = 0$). Pour $x = 3$ et $y = 0$, on trouve

$$(3-a)^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$

Pour $x = -3$ et $y = 0$, on trouve

$$(-3-a)^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$

En faisant la différence des deux équations obtenues, on trouve :

$$(3-a)^2 = (-3-a)^2$$

ce qui donne

$$3 - a = -3 - a \text{ ou } 3 - a = 3 + a.$$

Le premier cas est impossible, et le second donne $a = 0$. On trouve de même que $b = 0$. Reprenant le point $(3, 0, 0)$, on trouve encore que $c^2 + 9 = R^2$. On utilise maintenant le deuxième cercle. On a donc, si $x^2 + y^2 = 25$ et $z = 2$, $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = R^2$, soit

$$25 + (2-c)^2 = R^2 \implies 25 + 4 - 4c + R^2 - 9 = R^2 \implies c = 5.$$

On en déduit $R^2 = 34$, et l'équation de la sphère contenant les deux cercles est :

$$x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 34.$$

Un problème de lieu

Soient A, B et C trois points distincts de l'espace. Déterminer les points M de l'espace pour lesquels $\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

Par la formule du double produit vectoriel, l'équation s'écrit encore

$$(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC})\overrightarrow{MB} - (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

On distingue alors deux cas. Si $M \in (BC)$, le produit vectoriel $\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}$ est nul, et donc la condition est satisfaite. Si $M \notin (BC)$, alors les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ ne sont pas colinéaires, et donc la condition précédente est vérifiée si et seulement si

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \text{ et } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Ces deux conditions expriment que M appartient à la sphère de diamètre $[AC]$ et à la sphère de diamètre $[AB]$. Si on note $\mathcal{C}$ cette intersection, l'ensemble des points M solution est donc la réunion de la droite (BC) et de $\mathcal{C}$. Remarquons que $\mathcal{C}$ est ou réduit au point A (si les deux sphères sont tangentes en A), ou un cercle.

Sphère circonscrite et cercle circonscrit

Soient a, b, c trois réels non nuls, et soient $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$.

1. Donner l'équation de la sphère $\mathcal{S}$ passant par O, A, B et C.
2. Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C.
3. En déduire le rayon du cercle $\mathcal{C}$ passant les points A, B et C.

---

1. Une sphère a pour équation $(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2$. Si on écrit que 0 est élément de la sphère, on obtient $u^2 + v^2 + w^2 = R^2$. Ensuite, si on écrit que A est un point de la sphère, on obtient

   $$(a-u)^2 + v^2 + w^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

   soit $u = a/2$. En utilisant les points B et C, on trouve ensuite $v = b/2$ et $w = c/2$. L'équation de la sphère recherchée est donc

   $$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

2. C'est plus facile et plus classique. On trouve

   $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

3. Le cercle recherché est l'intersection de la sphère et du plan. Notons I le centre de la sphère, $I(a/2, b/2, c/2)$, et J le projeté orthogonal de I sur le plan $\mathcal{P}$. Alors J est le centre de $\mathcal{C}$, et le rayon de $\mathcal{C}$ est la longueur JA. On peut alors rechercher les coordonnées de J, où être un peu plus malin et travailler dans le triangle AJI qui est rectangle en J. Le théorème de Pythagore donne alors :
$$AJ^2 = AI^2 - IJ^2.$$
Or, on sait que $AI^2 = R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ et que
$$IJ = \mathrm{dist}(I, \mathcal{P}) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{2\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$
On conclut que
$$AJ^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\right).$$

Plus courte distance sur la sphère

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre O et de rayon $R > 0$. Soient également deux points A et B de $\mathcal{S}$. On cherche à déterminer, parmi les arcs de cercle tracés sur la sphère et joignant A et B, celui qui est le plus court. Soit $\mathcal{C}$ un tel arc de cercle, intersection du plan $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{S}$. On note H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$, r le rayon de l'arc de cercle, $a = AB$, et θ l'angle $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) \in [0, \pi]$.

1. Démontrer que $\sin(\theta/2) = a/2r$.
2. En déduire que la longueur de $\mathcal{C}$ est $\frac{a\theta}{2\sin(\theta/2)}$.
3. Démontrer que $\theta \geq 2\arcsin(a/2R)$.
4. Conclure.

---

1. Le triangle HAB est isocèle en H, avec $HA = HB = r$, $AB = a$, et θ l'angle en H. On en déduit immédiatement la relation demandée (par exemple en considérant le triangle rectangle HCB, où C est le milieu de $[AB]$, et en écrivant les relations trigonométriques dans ce triangle).
2. La longueur de l'arc de cercle est $l = r\theta$. Il suffit alors de remplacer r par la valeur trouvée précédemment.

3. Dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, la fonction sin est croissante. De plus, on sait que $r \leq R$. On en déduit que
$$\sin(\theta/2) \geq \frac{a}{2R} \implies \theta \geq 2 \arcsin\left(\frac{a}{2R}\right).$$

4. La longueur de l'arc de cercle vaut $f(\theta) = \frac{a\theta}{2\sin(\theta/2)}$, où θ parcourt l'intervalle $[2\arcsin(a/2R), \pi]$. Mais f est dérivable sur cet intervalle, et sa dérivée vaut :
$$f'(\theta) = \frac{a\cos(\theta/2)\big(2\tan(\theta/2) - \theta\big)}{4\sin^2(\theta/2)}.$$
Or, sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $\tan(x) \geq x$, et donc $f'(\theta) \geq 0$. Ainsi, f est croissante, et la longueur minimale est atteinte au début de l'intervalle, c'est-à-dire pour $\theta = 2\arcsin(a/2R)$, où, ce qui est plus clair, pour $r = R$. Les plus courts arcs de cercle allant de A et B et tracés sur la sphère sont donc les arcs de grand cercle. Ils sont donnés par l'intersection de la sphère et du plan défini par les trois points O, A, B. Si ces trois points ne sont pas alignés, il existe un seul grand cercle passant par A et B.
En particulier, bien que Lyon et Montréal soit sensiblement à la même latitude, un avion effectuant ce trajet n'emprunte pas le parallèle, mais un arc de grand cercle qui l'emmène bien plus au nord.

Chapitre 26

Arcs Paramétrés

Astroïde

Tracer le support Γ de la paramétrisation suivante :

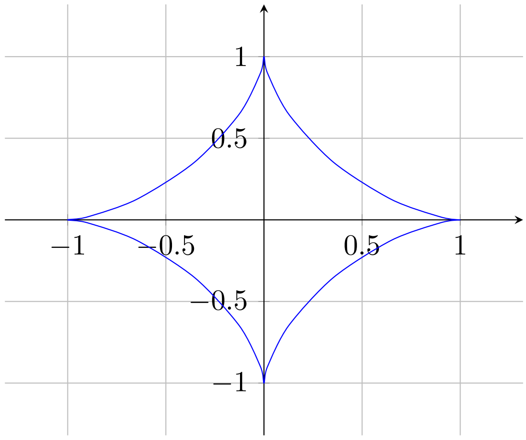
$$M(x) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos^3 t \\ sin^3 t \end{pmatrix}$$

On a $M(t+2\pi) = M(t)$. De plus, $M(t+\pi) = \begin{pmatrix} -cos^3 t \\ -sin^3 t \end{pmatrix}$ est le symétrique par rapport à l'origine du repère O. On a ensuite $M(-t) = \begin{pmatrix} cos^3 t \\ -sin^3 t \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ symétrique orthogonale par rapport à l'axe Ox. Pour finir $M(\frac{\pi}{2}+t) = \begin{pmatrix} sin^3 t \\ cos^3 t \end{pmatrix}$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. On peut donc se restreindre pour l'étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $x'(t) = -3sin(t)cos^2(t) \leq 0$, et $y'(t) = 3cos(t)sin^2(t) \geq 0$. On en déduit les variations suivantes :

t	0		$\frac{\pi}{4}$
x	1	$\searrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

On a $\overrightarrow{v(0)} = \overrightarrow{M'(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il s'agit d'un point stationnaire. On regarde alors $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -tan(t) \underset{t \to 0}{\to} 0$. La tangente au point $M(0) = O$ a donc une pente nulle, c'est donc l'axe Ox. On en déduit le tracé suivant :



Une recherche de point fixe

Soit l'arc paramétré $M(x) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ 3t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du point double.

On cherche $t_1 \neq t_2$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
M(t_1) = M(t_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3t_1^3 + 2t_1^2 - t_1 - 1 &=& 3t_2^3 + 2t_2^2 - t_2 - 1 \\ 3t_1^2 + 2t_1 + 1 &=& 3t_2^2 + 2t_2 + 1 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3(t_1^3 - t_2^3) + 2(t_1^2 - t_2^2) - (t_1 - t_2) &=& 0 \\ 3(t_1^2 - t_2^2) + 2(t_1 - t_2) &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (t_1 - t_2).[3(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) + 2(t_1 + t_2) - 1] &=& 0 \\ (t_1 - t_2).[3(t_1 + t_2) + 2] &=& 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi si $t_1 \neq t_2$,

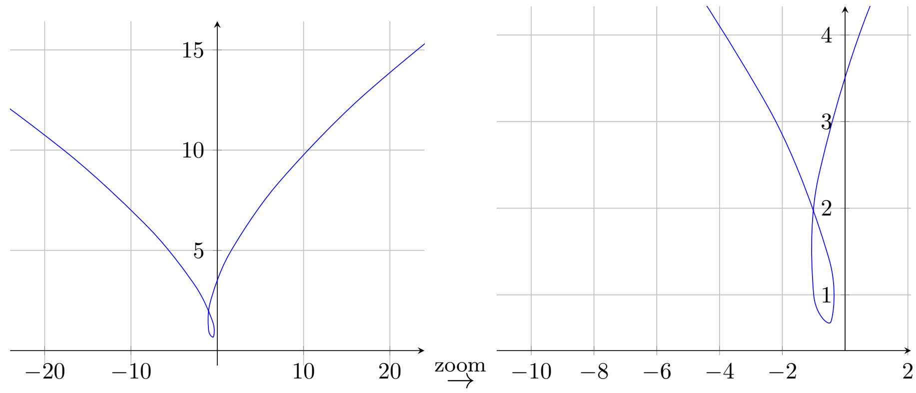
$$M(t_1) = M(t_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3(S^2 - P) + 2S - 1 &=& 0 \\ 3S + 2 &=& 0 \end{array} \right.$$

Où $S = t_1 + t_2$ et $P = t_1 t_2$.

Car $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ et $t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - t_1 t_2$. On en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{ll} P &= -\frac{1}{3} \\ S &= -\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Ainsi, t_1 et t_2 sont racines de $X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{1}{3} = 0$ c'est-à-dire $t_1 = -1$ et $t_2 = \frac{1}{3}$ (ou l'inverse). Les coordonnées du point double sont $M(-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



La cycloïde

1. Un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon $R > 0$ roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $(\mathcal{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathcal{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathcal{C})$ (M est mobile, mais solidaire de $(\mathcal{C})$). On pose $t = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I})}$. Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre).
2. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & R.(t - sin(t)) \\ y & = & R.(1 - cos(t)) \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.

---

1. La condition de roulement sans glissement se traduit par $\overline{OI} = MI$ ou encore $x_\Omega = Rt$. On en déduit que

$$x_M = x_\Omega + x_{\overrightarrow{\Omega M}} = Rt + Rcos(2\pi - \frac{\pi}{2} - t) = Rt - Rsin(t) = R(t - sin(t))$$

et

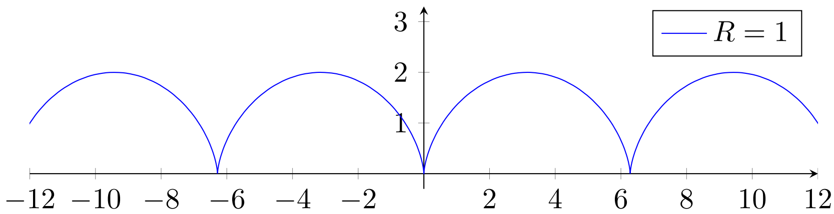
$$y_M = y_\Omega + y_{\overrightarrow{\Omega M}} = R + Rsin(2\pi - \frac{\pi}{2} - t) = R - Rcos(t) = R(1 - cos(t))$$

2. Domaine d'étude. Pour tout réel t, M(t) existe et $M(t + 2\pi) = M(t) + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}(2\pi R, 0)$. Par suite, on trace la courbe quand t décrit $[0, 2\pi]$ et la courbe complète par translations de vecteurs $k.\overrightarrow{u}, k \in \mathbb{Z}$. Pour tout réel t, $M(-t) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t))$. On trace la courbe quand t décrit $[0, \pi]$ et on complète par réflexion d'axe (Oy) puis par translations.

Etudes des points singuliers. Pour $t \in [0, \pi]$, $x'(t) = R(1 - cos(t)) = 2Rsin^2(\frac{t}{2})$ et $y'(t) = Rsin(t) = 2Rsin(\frac{t}{2})cos(\frac{t}{2})$. Le point M9t) est reegulier si et seulement si $t \in]0,\pi]$. Dans ce cas la tangente en M(t) est dirigée par $\begin{pmatrix} 2Rsin^2(\frac{t}{2}) \\ 2Rsin(\frac{t}{2})cos(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$ ou encore par $\begin{pmatrix} sin(t/2) \\ cos(t/2) \end{pmatrix}$. Etudions également le point singulier M(0). Pour $t \in]0,\pi]$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{R(1-cos(t))}{R(t-sin(t))} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2}}{\frac{t^3}{6}} = \frac{3}{t}$$

Ainsi, $\underset{t\to 0^+}{lim} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = +\infty$ et la tangente en M(0) est dirigée par (0,1). Ainsi, dans tous les cas, la tangente en M(t) est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} sin(t/2) \\ cos(t/2) \end{pmatrix}$. Par symétrie, M(0) est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x et y sont des fonctions croissantes sur $[0,\pi]$.



Une courbe de Lissajous
Etude et construction de

$$\begin{cases} x(t) &= sin(2t) \\ y(t) &= sin(3t) \end{cases}$$

Domaine d'étude. Pour tout réel t, $M(t)$ existe. De plus, $M(t+2\pi) = M(t)$, et la courbe complète est obtenue quand t décrit $[-\pi,\pi]$. Dans le même temps, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, M(-t) = \begin{pmatrix} sin(-2t) \\ sin(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(2t) \\ -sin(3t) \end{pmatrix} = s_O(M(t))$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0,\pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O. Ensuite, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R}, M(\pi - t) = \begin{pmatrix} sin(2\pi - 2t) \\ sin(3\pi - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(2t) \\ sin(3t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t))$$

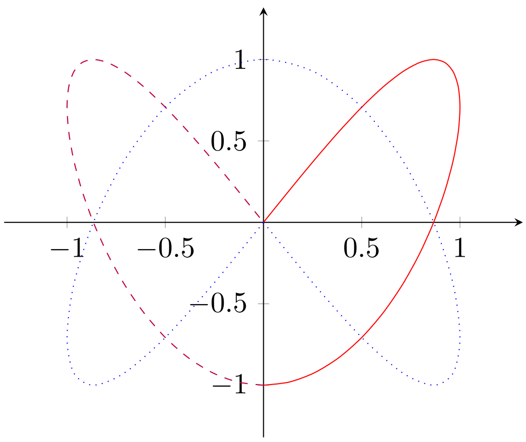
On étudie et on contruit la courbe pour $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe Oy, puis par symétrie centrale de centre O.

Enfin, on note aussi que $M(t+\pi) = s_{Ox}(M(t))$, mais cette constatation ne permet pas non plus de réduire le domaine d'étude.

Variations conjointes de x et y. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x'(t) = 2cos(2t)$ et $y'(t) = 3cos(3t)$. On en déduit immédiatement le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	

puis, on en déduit la courbe



Points multiples. D'abord, tout point de l'arc est multiple, puisque la courbe est parcourue une infinité de fois. Il y a essentiellement deux *vrais* points multiples à determiner, les autres s'en déduisent par symétrie. L'un des deux est le point de (Ox) d'abscisse strictement positive obtenu pour un certain réel t de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$y(t) = 0 \iff sin(3t) = 0 \iff 3t \in \pi\mathbb{Z} \iff t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \iff t = \frac{\pi}{3}$$

Le point de la courbe qui est sur (Ox) et a une abscisse strictement positive est le point $M(\frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Sinon, on cherche $t_1 \in]0, \frac{\pi}{3}[$ et $t_2 \in]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}[$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$.

$$\begin{aligned} M(t_1) = M(t_2) &\implies x(t_1) = x(t_2) \iff t_2 \in t_1 + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } t_2 \in \tfrac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z} \\ &\implies t_2 \in \tfrac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z} \\ &\implies t_2 = \tfrac{\pi}{2} - t_1 - \pi \\ &\implies t_2 = -\tfrac{\pi}{2} - t_1 \end{aligned}$$

Réciproquement, si $t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1$, alors $x(t_1) = x(t_2)$, et donc

$$\begin{aligned} M(t_1) = M(t_2) &\iff y(-\tfrac{\pi}{2} - t_1) = y(t_1) \\ &\iff sin(3(-\tfrac{\pi}{2} - t_1)) = sin(3t_1) \\ &\iff 3t_1 \in -\tfrac{3\pi}{2} - 3t_1 + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 3t_1 \in \pi + \tfrac{3\pi}{2} + 3t_1 + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff 6t_1 \in -\tfrac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff t_1 \in -\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{3}\mathbb{Z} \\ &\iff t_1 = \tfrac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Le point $M(\frac{\pi}{12}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ est le point multiple d'abscisse et d'ordonnée strictement positives.

La lemniscate de Bernoulli
Etude et construction de

$$x(t) = \frac{t}{1+t^4} \; ; \; y(t) = t^2.x$$

Domaine d'étude. Pour tout réel t, $M(t)$ existe. Dans le même temps, $\forall t, M(-t) = s_O(M(t))$. On étudie et construit la courbe quand t décrit $\mathbb{R}^+$ et on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O. De plus, pour $t > 0$,

$$M(\frac{1}{t}) = (\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^4}}, \frac{\frac{1}{t^3}}{1+\frac{1}{t^4}}) = (\frac{t^3}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^4}) = s_{y=x}(M(t))$$

On étudie et construit la courbe quand t décrit [0,1] et on obtien la courbe complète par réflexion d'axe la droite d'équation y=x puis par symétrie centrale de centre O.

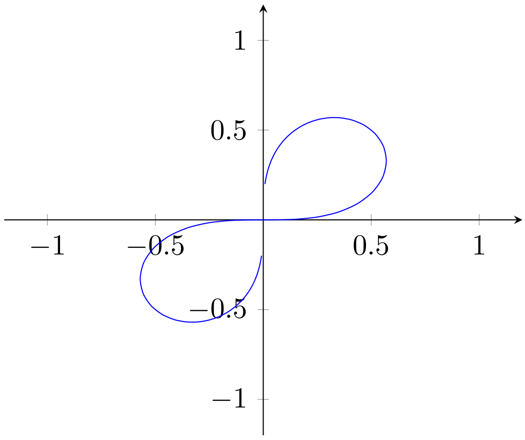
Variations conjointes de x et y. Les fonctions x et y sont dérivables sur [0,1] et pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{(1+t^4)-t(4t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \\ y'(t) = \frac{3t^2(1+t^4)-t^3(4t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2} \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{(\sqrt[4]{3})^3}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0	$+$		$+$	

La tangente en M(0) est dirigée par le vecteur (1,0). Par symétrie, la tangente en $+\infty$ est dirigée par le vecteur (0,1).



Le folium de Descartes
Etude et construction de

$$x(t) = \frac{3t}{t^3+1}\ ;\ y(t) = t.x(t)$$

Domaine de définition. Les fonctions x et y sont définies sur

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Réduction du domaine d'étude. L'application $\Phi_1 : t \mapsto 1/t$ est une bijection de $I_1 =]-1,1] - \{0\}$ sur $I_1' = \mathbb{R} - [-1,1[$ et l'on a

$$x(1/t) = y(t) \text{ et donc } y(1/t) = x(t)$$

La courbe est symétrique par rapport à la première bissectice. On l'étudie sur I_1 et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à cette droite.
Dérivées. On obtient

$$x'(t) = 3\frac{1-2t^3}{(t^3+1)^2} \text{ et } y'(t) = 3t\frac{2-t^3}{(t^3+1)^2}$$

Dans]-1,1], la dérivée y' s'annule en 0 et la dérivée x' en

$$\alpha = 2^{-1/3}$$

On obtient

$$x(\alpha) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59 \text{ et } y(\alpha) = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

Asymptote. Lorsque t tend vers -1, la fonction x tend vers $-\infty$ et la fonction y vers $+\infty$. On a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t$$

et la limite de cette quantité vaut -1. Ensuite

$$y(t) + x(t) = 3\frac{t^2 + t}{t^3 + 1}$$

On peut mettre (t+1) en facteur au numérateur et au dénominateur, ce qui donne, après simplification,

$$y(t) + x(t) = \frac{3t}{t^2 - t + 1}$$

et la limite de cette quantité vaut -1. La courbe admet donc l'asymptote d'équation

$$y = -x - 1$$

Pour étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote, on calcule

$$y(t) + x(t) + 1 = \frac{3t}{t^2 - t + 1} + 1 = \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1} = \frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1}$$

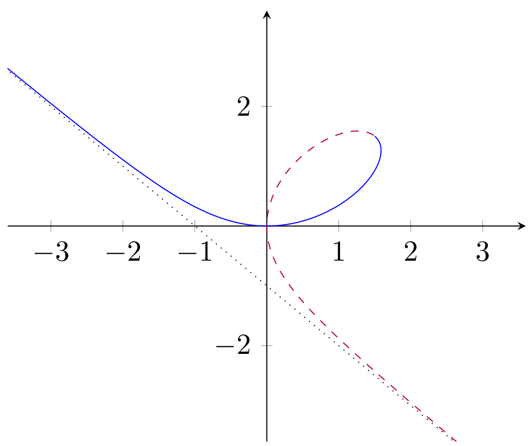
Cette expression est toujours positive et la courbe est donc au-dessus de l'asymptote.

Intersection avec les axes. Les fonctions x et y s'annulent en 0. Par symétrie, l'origine O est un point double de la courbe. Les tangentes sont les axes.

Tableau de variations.

t	-1		0		α		1
x'		$+$		$+$	0	$-$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$
y'		$-$	0	$+$		$+$	
y'/x'			0		∞		-1

Courbe.



Les tractrices

1. Trouver les trajectoires orthogonales à la famille des cercles de rayon R ($R > 0$ donné) et centrés sur (Ox)
2. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{ll} x(t) & = R(ln|tan(\frac{t}{2})| + cos(t)) \\ y(t) & = Rsin(t) \end{array}\right.$
   où R est un réel strictement positif donné.

---

1. Cherchons les arcs solutions sous la forme $\left\{\begin{array}{lll} x & = & f(t) + R.cos(t) \\ y & = & R.sin(t) \end{array}\right.$
où f est une fonction dérivable sur un certain intervalle I (de sorte que le point M(t) est sur le cercle $\mathcal{C}(t)$ de centre $\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon R). La trajectoire cherchée est orthogonale à chaque cercle $\mathcal{C}(t)$ si et seulement si la tangente à cette trajectoire en M(t) est orthogonale à la tangente au cercle $\mathcal{C}(t)$ en M(t) ou encore *si et seulement si* les vecteurs $(f'(t){-}R.sin(t), R.cos(t))$ et $(-sin(t), cos(t))$ sont orthogonaux. Cette dernière condition s'écrit $-f'(t)sin(t)+R.(sin^2(t){+}cos^2(t)) = 0$ ou encore $f'(t) = \frac{R}{sin(t)}$ ou enfin, $f'(t) = Rln|tan(\frac{t}{2})|+C$. Les arcs solutions sont les arcs de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} R.(ln|tan(\frac{t}{2})| + cos(t)) + C \\ R.sin(t) \end{pmatrix}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Les courbes solutions se déduisent de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} R.(ln|tan(\frac{t}{2})| + cos(t)) \\ R.sin(t) \end{pmatrix}$ par translations de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{i}$. On peut montrer que la courbe obtenue est la trajectoire de la roue arrière d'une voiture quand celle-ci se gare en marche avant, la roue avant étant quant à elle collée au trottoir.

2. Domaine d'étude. La fonction $t \mapsto M(t)$ est 2π-périodique et on l'étudie donc sur $[-\pi, \pi]$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, M(t) existe si et seulement si $t \in]-\pi, \pi[-\{0\}$. Pour $t \in]-\pi, \pi[-\{0\}, M(-t) = s_{Ox}(M(t))$, puis

$$M(\pi{-}t) = \begin{pmatrix} R.(ln|tan(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})| + cos(\pi - t)) \\ R.sin(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R.(-ln|tan(\frac{t}{2})| - cos(t)) \\ R.sin(t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t))$$

On eetudie et on construit la courbe quand t décrit $]0, \frac{\pi}{2}]$, et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox).

Dérivée. Etude des points singuliers. Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} R.(\frac{1}{sin(t)} - sin(t)) \\ R.cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R.\frac{cos^2(t)}{sin(t)} \\ R.cos(t) \end{pmatrix} = R.\frac{cos(t)}{sin(t)} \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$$

Par suite, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \iff \frac{cos^2(t)}{sin(t)} = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$. Le point $M(\frac{\pi}{2})$ est un point singulier. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$, $y(t) - y(\frac{\pi}{2} = R.(sin(t) - 1) = -R.(1 - cos(\frac{\pi}{2} - t)) \sim -\frac{R}{2}(\frac{\pi}{2} - t)^2$. D'autre part, posons $h = \frac{\pi}{2} - t$ ou encore $t = \frac{\pi}{2} - h$. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$x'(t) = R\frac{cos^2(t)}{sin(t)} = R\frac{sin^2(h)}{cos(h)} \sim R.h^2 = R.(t - \frac{\pi}{2})^2 + o((t - \frac{\pi}{2})^2)$$

et donc, par intégration,

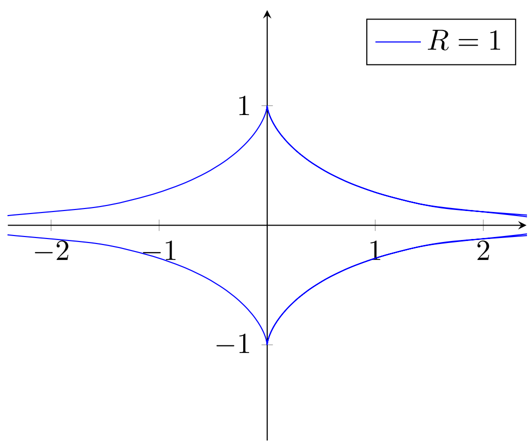
$$x(t) - x(\frac{\pi}{2}) = \frac{R}{3}(t - \frac{\pi}{2})^3 + o((t - \frac{\pi}{2})^3) \sim \frac{R}{3}(t - \frac{\pi}{2})^3$$

Comme d'autre part, $y(t) - y(\frac{\pi}{2}) = -R.(1 - sin(t)) = -R(1 - cos(h)) \sim -\frac{R}{2}h^2 = -\frac{R}{2}(t - \frac{\pi}{2})^2$, on en déduit que

$$\frac{y(t) - y(\frac{\pi}{2})}{x(t) - x(\frac{\pi}{2})} \sim \frac{-\frac{R}{2}(t - \frac{\pi}{2})^2}{\frac{R}{3}(t - \frac{\pi}{2})^3} = -\frac{3}{2(t - \frac{\pi}{2})}$$

et donc $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{y(t) - y(\frac{\pi}{2})}{x(t) - x(\frac{\pi}{2})} = +\infty$. Par symétrie d'axe (Oy), la tangente en $M(\frac{\pi}{2})$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$ et $M(\frac{\pi}{2})$ est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x' et y' sont strictement positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. On en deeduit que x et y sont strictement croissantes sur cet intervalle. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers 0. On en déduit que la droite d'équation x=0 est asymptote à la courbe. D'autre part, x croit de $-\infty$ à 0 pendant que y croit de 0 à 1.

Courbe.



Orthoptiques

La courbe orthoptique d'une courbe $(\mathcal{C})$ est le lieu des points du plan d'où on peut mener (au moins) deux tangentes à $(\mathcal{C})$ orthogonales.

Déterminer l'orthoptique de la courbe dans chacun des cas suivants :

1. Une atroïde de paramétrisation $\left\{\begin{array}{l} x = a.cos^3(t) \\ y = a.sin^3(t) \end{array}\right.$, $a > 0$ donné

2. L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $(a,b) \in]0, +\infty[^2$.

---

1. Il est assez simple de montrer que la tangente (T_t) en M(t) d'une astroïde est toujours dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(t) = (-cos(t), sin(t))$. Une équation de la tangente en M(t) est donc $sin(t).(x - a.cos^3(t)) + cos(t).(y - a.sin^3(t)) = 0$ ou bien encore

$$x.sin(t) + y.cos(t) = a.sin(t).cos(t) \text{ noté } (T_t)$$

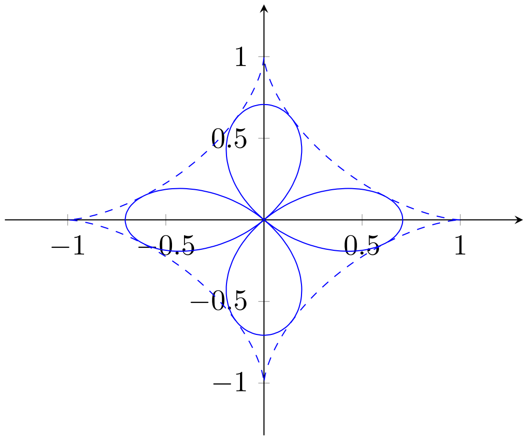
Soit $(t, u) \in [-\pi, \pi]^2$.

$$\begin{array}{rcl} (T_t) \perp (T_u) & \Longleftrightarrow & < \overrightarrow{u}(t) | \overrightarrow{u}(u) >= 0 \\ & \Longleftrightarrow & cos(t).cos(u) + sin(t).sin(u) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & cos(t-u) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & u \in t + \frac{\pi}{2} + \pi.\mathbb{Z} \end{array}$$

Il est alors clair que l'orthoptique est l'ensemble des points d'intersection des tangentes (T_t) et $(T_{t+\frac{\pi}{2}})$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} (T_t) \cap (T_{t+\frac{\pi}{2}}) & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x.sin(t) + y.cos(t) & = & a.sin(t).cos(t) \\ x.cos(t) - y.sin(t) & = & -a.sin(t).cos(t) \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x(t) = -\begin{vmatrix} a.sin(t).cos(t) & cos(t) \\ -a.sin(t).cos(t) & -sin(t) \end{vmatrix} \\ y(t) = -\begin{vmatrix} sin(t) & a.sin(t).cos(t) \\ cos(t) & -a.sin(t).cos(t) \end{vmatrix} \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x(t) = a.sin(t).cos(t).(-cos(t) + sin(t)) \\ y(t) = a.sin(t).cos(t).(cos(t) + sin(t)) \end{array}\right. \end{array}$$

L'orthoptique recherchée est la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} a.sin(t).cos(t).(-cos(t) + sin(t)) \\ a.sin(t).cos(t).(cos(t) + sin(t)) \end{pmatrix}$.



2. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et on considère l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Pour un point $m=(x,y)$, on notera $f(m)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ de sorte que :

$$m\in\mathcal{C}\iff f(m)=0$$

Soit un point $p=(x_0,y_0)$. On peut tracer en général au plus deux tangentes à $\mathcal{C}$ issues du point p, que l'on détermine comme suit : pour un vecteur $u=(x,y)$ la droite $\mathcal{D}_{p,u}$ passant par p et de vecteur directeur u et tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si elle intersecte $\mathcal{C}$ en un seul point.

En notant $p+tu=(x_0+tx,y_0+ty)$ les points de $\mathcal{D}_{p,u}$ (t variant dans $\mathbb{R}$), la droite $\mathcal{D}_{p,u}$ est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation $f(p+tu)=0$ admet une unique solution $t\in\mathbb{R}$.

En posant $q(m)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, on définit une forme quadratique q dont la forme bilinéaire associée est donnée par $B(m_1,m_2)=\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}$. On sait que $q(p+tu)=q(p)+2tB(p,u)+t^2q(u)$ et donc

$$f(p+tu)=0\iff t^2q(u)+2tB(p,u)+q(p)-1=0 \text{ noté } [1]$$

L'équation [1] qui est vraiment du second degré car $q(u)\neq 0$ admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul : on a donc obtenu le (1) de la propriété suivante :

Proposition 1 – Pour un point $p\in\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{T}_p$ la réunion des tangentes à $\mathcal{C}$ issue du point p.

1. Le point $p\in\mathbb{R}^2$ étant fixé, un vecteur $u\neq 0$ est vecteur directeur d'une tangente à $\mathcal{C}$ issue de p si et seulement si :

$$q(u)(q(p)-1)-B(p,u)^2=0 \text{ noté } [2]$$

2. Si on note Q la forme quadratique : $u \mapsto q(u)(q(p)-1) - B(p,u)^2$, la condition du (1) revient à chercher les $u \neq 0$ dans le cône isotrope de cette forme quadratique, qu'on notera $\overrightarrow{\mathcal{T}_p}$. On en déduit que $\mathcal{T}_p$ peut être soit vide, soit formé d'une droite, soit formé de deux droites.

Démonstration. Justification du (2) La classification des fromes quadratiques en dimension deux sur $\mathbb{R}$ donne que leur cône isotrope peut être : ou bien réduit à $\{0\}$ (si signature (2,0) ou (0,2)) ou bien formé de deux droites (si signature (1,1)) ou bien formé d'une seule droite (si la forme quadratique est de rang 1), en excluant le cas de la forme nulle.

On en déduit les trois formes possibles du cône affine $\mathcal{T}_p$. Si $\overrightarrow{\mathcal{T}_p} = \{0\}$ alors $\mathcal{T}_p = \emptyset$. Si $\overrightarrow{\mathcal{T}_p}$ est formé d'une (respectivement deux) droite(s) vectorielle(s), alors $\mathcal{T}_p$ est composé d'une (respectivement deux) droite(s) affine(s). □

Dans le cas où $\overrightarrow{\mathcal{T}_p}$ est une réunion de deux droites, la condition $u = (x,y) \in \overrightarrow{\mathcal{T}_p}$ peut aussi s'écrire :

$$(\alpha.x + \beta.y)(\alpha'.x + \beta'.y) = 0 \text{ noté } [3]$$

Sous cette forme, la condition que les deux droites de $\overrightarrow{\mathcal{T}_p}$ soient orthogonales devient :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0 \text{ noté } [4]$$

En développant le produit dans [3], $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont respectivement les coefficients de x^2 et y^2 et on a obtenu :

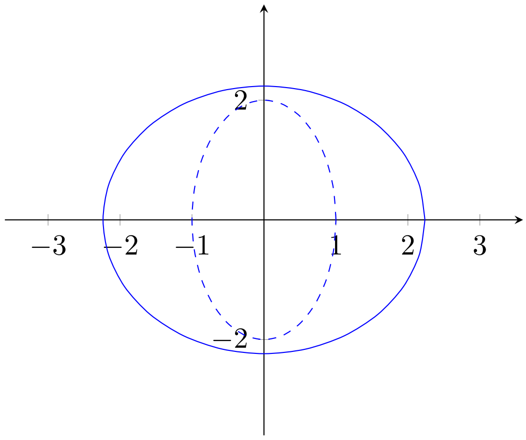
Proposition 2 – Les deux tangentes issues du point p sont orthogonales si et seulement si dans la forme quadratique Q dans la *proposition 1* en prenant $u = (x,y)$ la somme des coefficients de x^2 et de y^2 est nulle.

Or $Q(u) = (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})(q(p)-1) - (\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2})^2$ donc la condition sur la somme des coefficients de x^2 et y^2 est :

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{a^2} + \tfrac{1}{b^2})(q(p)-1) - \tfrac{x_0^2}{a^4} - \tfrac{y_0^2}{b^4} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\tfrac{1}{a^2} + \tfrac{1}{b^2})(\tfrac{x_0^2}{a^2} + \tfrac{y_0^2}{b^2} - 1) = \tfrac{x_0^2}{a^4} + \tfrac{y_0^2}{b^4} \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{a^2b^2}(x_0^2 + y_0^2) = \tfrac{1}{a^2} + \tfrac{1}{b^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2\end{aligned}$$

On vient donc de montrer que d'un point $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on peut tracer deux tangentes orthogonales à $\mathcal{C}$ si et seulement p est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.

On a bien prouvé que : la courbe orthoptique de l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, dit *cercle de Monge* de l'ellipse $\mathcal{C}$.



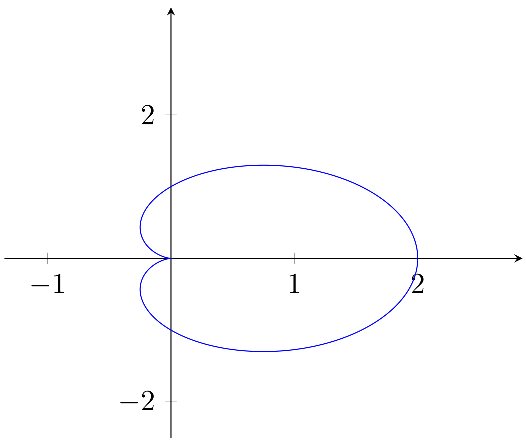
L'ellipse de centre O et de paramètres a=1 et b=2 ; ainsi que le cercle de Monge de centre O et de rayon $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

Chapitre 27

Courbes Polaires

La cardioïde
Etudier et tracer la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$.

On commence par remarquer que $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$, et donc qu'il suffit d'étudier la courbe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. De plus, on a $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$. On peut donc se contenter d'étudier la courbe sur $[0, \pi]$, puis d'appliquer une symétrie par rapport à la droite (Ox). Les variations de ρ sont évidentes : ρ est décroissante sur $[0, \pi]$ avec $\rho(0) = 2$ et $\rho(\pi) = 0$. Le seul point stationnaire est en π. La tangente est alors parallèle à $\vec{u}_\pi$, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses. On en déduit le tracé suivant :

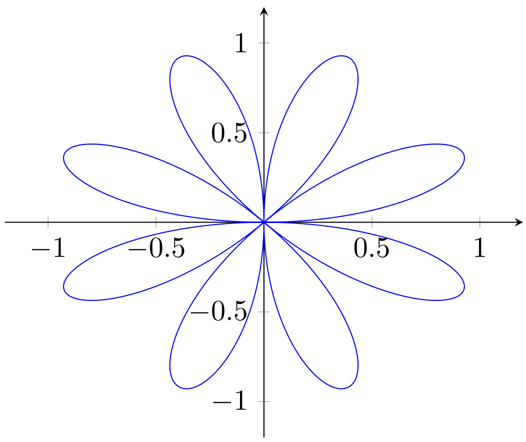


La rosace à huit feuilles
Construire la rosace d'équation polaire $\rho(\theta) = \sin(4\theta)$. On fera notamment attention à se restreindre à l'intervalle d'étude le plus petit possible.

On commence par remarquer que

$$\rho(\theta+\pi/2)=\rho(\theta).$$

Puisque $4\times\pi/2=2\pi$, on peut se contenter de tracer la courbe pour un intervalle de longueur $\pi/2$, puis de compléter en utilisant les 3 rotations de centre O et d'angle $\pi/2$, π et $3\pi/2$. On se limite pour le moment à l'intervalle $[-\pi/4,\pi/4]$. On remarque ensuite que $\rho(-\theta)=-\rho(\theta)$. On peut donc se contenter de tracer la courbe sur l'intervalle $[0,\pi/4]$, et on complètera le tracé par une symétrie d'axe (Oy). Enfin, on a $\rho(\pi/4-\theta)=\rho(\theta)$. On va donc se contenter de tracer la courbe sur l'intervalle $[0,\pi/8]$, et on va compléter le tracé par une symétrie d'axe polaire d'angle $\pi/8$.
Sur $[0,\pi/8]$, l'étude des variations de ρ est triviale. La fonction ρ est croissante, valant 0 en 0 et 1 en $\pi/8$. Le point correspondant à $\theta=0$ est un point stationnaire, la tangente à ce point est dirigée par le vecteur $\vec{u}_0$, c'est-à-dire que la tangente en ce point est l'axe des abscisses. En $\pi/8$, ρ' s'annule, et donc la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur, ie à $\vec{u}_{\pi/8}$ (on aurait pu aussi constater cette propriété en utilisant la symétrie par rapport à la droite d'axe polaire d'angle $\pi/8$). Finalement, on obtient le tracé suivant :



On remarquera en particulier les 16 axes de symétrie de la figure (tous ceux d'axe polaire $k\pi/8$, avec $0\leq k\leq 15$.

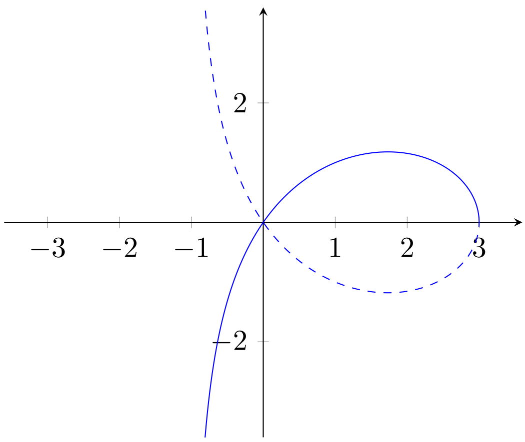
Une boucle
On considère la courbe d'équation polaire $\rho(\theta)=4\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}$.

1. Démontrer qu'on peut limiter l'intervalle d'étude à $[0,\pi/2[$.
2. Étudier la branche infinie de la courbe sur l'intervalle $[0,\pi/2[$.

3. Tracer la courbe, on précisera en particulier la tangente à la courbe aux points correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \pi/3$.

---

1. On commence par remarquer que la fonction est 2π-périodique, ce qui permet de limiter l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]\backslash\{\pi/2, -\pi/2\}$. D'autre part, la fonction est paire. On peut donc limiter l'étude à $[0, \pi]\backslash\{\pi/2\}$ puis faire une symétrie par rapport à l'axe (Ox). Pour se limiter à l'intervalle $[0, \pi/2[$, il convient de remarquer que, en coordonnées polaires, les points (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + \pi)$ sont identiques. Or, $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$. On peut donc limiter l'étude à $[0, \pi/2[$, le tracé obtenu sur $]\pi/2, \pi]$ étant identique.
2. En $\frac{\pi}{2}^-$, $r(\theta)$ tend vers $-\infty$. On se place alors dans le repère $(O, \vec{u}_{\pi/2}, \vec{v}_{\pi/2})$ dans lequel les coordonnées du point sont
$$X(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \pi/2) \text{ et } Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \pi/2).$$
$X(\theta)$ tend vers $+\infty$, et
$$Y(\theta) = -r(\theta)\cos(\theta) = 1 - 4\cos^2(\theta) \to 1$$
lorsque $\theta \to \pi/2$. On en déduit que, dans le repère $(O, \vec{u}_{\pi/2}, \vec{v}_{\pi/2})$, la droite d'équation $Y = 1$ est asymptote à la courbe. Dans l'ancien repère, cette droite a pour équation $x = -1$.
3. Sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est dérivable, et sa dérivée est
$$\rho'(\theta) = -\sin(\theta)\left(4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right) \leq 0.$$
Ainsi, la fonction décroissante sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, et surtout elle s'annule en $\pi/3$, étant positive entre 0 et $\pi/3$ et négative entre $\pi/3$ et $\pi/2$. Au point $\theta = 0$, on a $\rho'(0) = 0$ et donc la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses. En $\pi/3$, on a $\rho(\pi/3) = 0$ et donc la courbe est tangente à $\vec{u}_{\pi/3}$. On en déduit le tracé suivant :



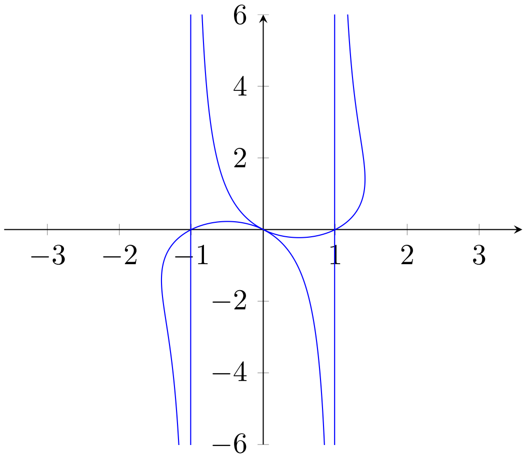
Détaillée

On considère la courbe paramétrée Γ d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \tan\theta$.

1. Étudier les symétries de Γ et restreindre l'intervalle d'étude.
2. Étudier les variations de ρ.
3. Déterminer les asymptotes de Γ (on en donnera une équation dans le répère initial).
4. Déterminer la (les) tangentes de la courbe en O.
5. Tracer (le support de) Γ.

---

1. Remarquons d'abord que ρ est 2π-périodique, et donc qu'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $]\pi/2, 3\pi/2[\backslash\{\pi/2\}$. De plus, ρ est π-périodique. On peut donc se contenter d'étudier ρ sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On obtiendra le tracé complet en effectuant une symétrie de centre O et d'angle π (c'est-à-dire une symétrie centrale de centre O).
2. ρ est croissante sur I, de limite $-\infty$ en $-\pi/2$ et $+\infty$ en $\pi/2$.
3. On a une asymptote en $\pi/2$ et en $-\pi/2$. En $\pi/2$, posons
$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \pi/2) = -\rho(\theta)\cos(\theta) = -\cos(\theta) - \sin(\theta) \to -1$$
lorsque $\theta \to \pi/2$. La droite d'équation $Y = -1$ dans le repère $(O, \vec{u}_{\pi/2}, \vec{v}_{\pi/2})$ est donc asymptote à la courbe. Dans le repère d'origine, il s'agit de la droite $x = 1$ (il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre). De même en $-\pi/2$, on trouve la droite d'équation $x = -1$ pour asymptote. Pour déterminer toutes les asymptotes à Γ, il faut encore prendre les symétriques de ces droites par rapport à l'origine. Ca tombe bien, on n'obtient pas de nouvelles droites.
4. Déterminons les valeurs de $\theta \in I$ pour lesquelles $\rho(\theta) = 0$. On obtient l'équation $\tan(\theta) = -1$, et donc $\theta = -\pi/4$. La tangente est alors dirigée par $\vec{u}_{-\pi/4}$.
5. Avec les éléments précédents, on obtient le tracé suivant (remarquons que $\rho(\theta) \geq 1$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$:



Deux branches infinies

Etudier et tracer la courbe paramétrée d'équation $\rho(\theta) = 1 + \frac{\pi/4}{\theta - \pi/3}$.

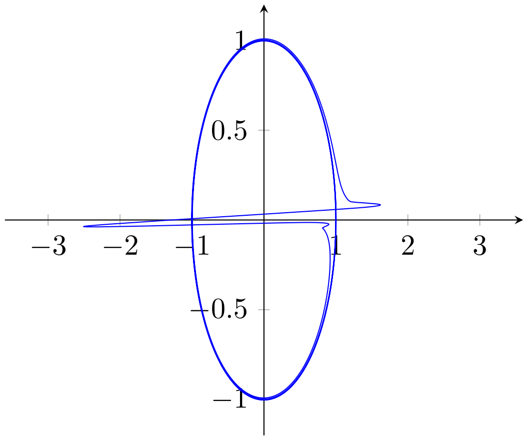
La fonction ρ est définie sur $]-\infty, \pi/3[\cup]\pi/3, +\infty[$. Sur chacun des deux intervalles qui constituent son ensemble de définition, elle est décroissante, et elle s'annule en $\pi/6$. On obtient donc le tableau de variation suivant :

θ	$-\infty$		$\pi/6$			$\pi/3$			$+\infty$
ρ	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$	1

Au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, ρ tend vers 1. La courbe s'enroule alors autour du cercle de centre O et de rayon 1. Étudions maintenant la branche infinie autour de $\pi/3$, en posant $Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \pi/3)$. Il vient

$$Y(\theta) = \sin(\theta - \pi/3) + \frac{\pi}{4} \times \frac{\sin(\theta - \pi/3)}{\theta - \pi/3}.$$

Puisque $\sin(x)/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, on en déduit que $Y(\theta)$ tend vers $\pi/4$ en $\pi/3$. La courbe admet donc la droite d'équation $Y = \pi/4$ dans le repère $(O, \vec{u}_{\pi/3}, \vec{v}_{\pi/3})$ pour asymptote. On remarque enfin qu'à l'origine, point atteint uniquement pour le paramètre $\theta = \pi/4$, la tangente a pour équation polaire $\theta = \pi/4$. On en déduit donc le tracé suivant :



includegraphicsdeuxinfinies.ps

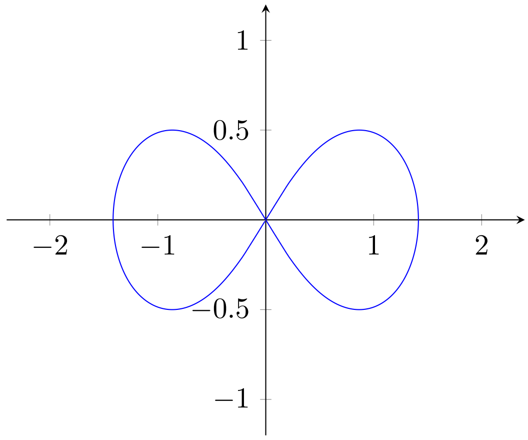
Lemniscate de Bernoulli

On considère les points du plan $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$. Déterminer une équation polaire de l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que $MF \times MF' = 1$. Étudier et tracer cette courbe.

Soit $M(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ un point du plan. On écrit que

$$\begin{aligned}
MF \times MF' = 1 \quad &\iff \quad MF^2 \times (MF')^2 = 1\\
&\iff \quad \big((\rho\cos\theta - 1)^2 + \rho^2\sin^2\theta\big) \times \big((\rho\cos\theta + 1)^2 + \rho^2\sin^2\theta\big) = 1\\
&\iff \quad \big(\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1\big) \times \big(\rho^2 + 2\rho\cos\theta + 1\big) - 1 = 0\\
&\iff \quad \rho^4 + 2\rho^2(1 - 2\cos^2\theta) = 0\\
&\iff \quad \rho^2(\rho^2 - 2\cos 2\theta) = 0.
\end{aligned}$$

La courbe est donc décrite par l'équation polaire $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$ (le cas $\rho = 0$ étant couvert par cette équation). Elle est définie sur des intervalles du type $[-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi]$. Comme la fonction est 2π-périodique, on peut se limiter à $[-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$. De plus, $\rho(\pi - x) = \rho(x)$: la courbe est symétrique par rapport à (Oy), et on peut restreindre le domaine d'étude à $[-\pi/4, \pi/4]$. On remarque aussi que $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, et donc on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, \pi/4]$, puis faire une symétrie par rapport à (Ox). Sur $[0, \pi/4]$, la fonction ρ est décroissante, valant 0 en $\pi/4$ (la tangente en O est donc d'équation $\theta = \pi/4$), et $\sqrt{2}$ en 0. On en déduit le tracé suivant :


1
0.5
−2
−1
1
2
−0.5
−1

Chapitre 28

Coniques & Quadriques

28.1 Coniques

28.1.1 Equations des coniques

Réduction de l'équation d'une conique

Pour les coniques suivantes, déterminer la nature, les éléments caractéristiques et une équation réduite :

1. $x^2 - xy + y^2 = 1$
2. $x^2 + \sqrt{3}xy + x - 2 = 0$
3. $2xy - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$
4. $\frac{x^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}y^2 - (1+3\sqrt{3})x - (3-\sqrt{3})y + 13 = 0$

---

1. Le discriminant de cette conique est -3. Elle est donc du genre ellipse. On commence par tourner le repère. Pour cela, on remarque que les coefficients devant x^2 et y^2 sont égaux. On en déduit que le changement de repère approprié est celui obtenu par une rotation d'angle $\pi/4$, soit en posant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{array}\right.$$
En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :
$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2/3} = 1.$$
On obtient donc une ellipse centré en 0, de demi-grand axe $a = \sqrt{2}$ et de demi-petit axe $\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Les axes de l'ellipse sont les axes (OX) et (OY), c'est-à-dire dans le repère initial les droites $y = x$ et $y = -x$.

2. Le discriminant de cette conique vaut $3/4 > 0$. Elle est donc du genre hyperbole. On élimine les termes en xy par rotation du repère. On fait une rotation d'angle θ tel que

$$\tan(2\theta) = \frac{b}{a-c} = \sqrt{3}$$

soit une rotation d'angle $\pi/6$. On obtient alors

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(X\sqrt{3} - Y) \\ y &= \frac{1}{2}(X + Y\sqrt{3}). \end{cases}$$

On obtient après simplifications l'équation

$$\frac{3}{4}X^2 - \frac{1}{4}Y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}X - \frac{Y}{4} = 1.$$

En reconnaissant le début du développement de deux carrés, on trouve

$$\frac{3}{4}\left(X + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

On a donc une hyperbole dont le centre a pour coordonnées dans le nouveau repère $(-\sqrt{3}/6; -1/2)$ et dont les asymptotes sont les droites d'équation $Y = \pm 3X$ ($a = 4/3$, $b = 4$, $b/a = 3$).

3. Le discriminant de cette conique est $4 - 4 \times 0 = 4 > 0$. Elle est donc du genre hyperbole. On commence par tourner le repère. Pour cela, on remarque que les coefficients devant x^2 et y^2 sont égaux. On en déduit que le changement de repère approprié est celui obtenu par une rotation d'angle $\pi/4$, soit en posant :

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :

$$X^2 - Y^2 + 2X + 2Y = 1.$$

On reconnait le début du développement d'un carré, et la relation précédente s'écrit

$$(X+1)^2 - (Y-1)^2 = 1.$$

On a donc une hyperbole, de centre $(-1, 1)$ dans le nouveau repère (c'est-à-dire $(-\sqrt{2}, 0)$ dans l'ancien), d'asymptotes les droites d'équation $(Y-1) = \pm(X+1)$.

4. Le discriminant de cette conique vaut 0 : elle est du genre parabole. On élimine les termes en xy par rotation du repère. On fait une rotation d'angle θ tel que
$$\tan(2\theta) = \frac{b}{a-c} = \sqrt{3}$$
soit une rotation d'angle $\pi/6$. On obtient alors
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}(X\sqrt{3}-Y) \\ y & = & \frac{1}{2}(X+Y\sqrt{3}). \end{array}\right.$$
En remplaçant dans l'équation on obtient, après simplifications,
$$\begin{aligned} Y^2-6X+2Y+13=0 \quad &\iff \quad (Y+1)^2-1-6X+13=0 \\ &\iff \quad (Y+1)^2=6(X-2). \end{aligned}$$
On obtient une parabole de sommet ayant pour coordonnées $(2,-1)$ dans le nouveau repère, et de paramètre 3.

Une conique à paramètres
Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation
$$x^2+2axy+y^2+4x-a^2=0.$$

1. Déterminer, suivant la valeur de a, le type de $\mathcal{C}$.
2. Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une parabole, déterminer le paramètre, le foyer et la directrice.
3. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a la conique $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on donnera le centre et le rayon.
4. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a la conique $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites.

---

1. Le discriminant de la conique vaut $\Delta = (2a)^2-4 = 4(a^2-1)$. La conique est donc du type ellipse si $|a|<1$, du type parabole si $|a|=1$, du type hyperbole si $|a|>1$. Dans tous les cas, on peut réduire l'équation de la conique en effectuant une rotation du repère d'angle $\pi/4$, soit en posant
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{array}\right.$$
L'équation de la conique devient
$$(1+a)X^2+(1-a)Y^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-a^2=0.$$

2. On obtient une parabole lorsque $a = \pm 1$.
   - Si $a = 1$, une translation $X' = X + \sqrt{2}/2$ et $Y' = Y + \sqrt{2}/2$ donne l'équation réduite de la parabole $X'^2 = \sqrt{2}Y'$. On en déduit le paramètre $p = \sqrt{2}/2$, le foyer $X'_F = 0$, $Y'_F = \sqrt{2}/4$, soit $x_F = -1/4$ et $y_F = -3/4$, la directrice $x - y = 2$.
   - Si $a = -1$, on effectue la translation $X' = X$ et $Y' = Y + \sqrt{2}/2$ et on obtient l'équation réduite $Y'^2 = \sqrt{2}X'$. On en déduit le paramètre $p = \sqrt{2}/2$, le foyer $x_F = -1/4$, $y_F = 3/4$ et la directrice $x + y = 3/2$.
3. On obtient un cercle lorsque $|a| < 1$ (type ellipse) et lorsque $1 + a = 1 - a$, soit $a = 0$. L'équation devient

$$X^2 + Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y = 0 \iff (X + \sqrt{2})^2 + (Y - \sqrt{2})^2 = 4.$$

   On obtient alors un cercle de centre Ω avec $X_\Omega = -\sqrt{2}$ et $Y_\Omega = \sqrt{2}$, et de rayon 2.
4. Pour obtenir deux droites, il faut être du type hyperbole, c'est-à-dire vérifier $|a| > 1$. Pour déterminer s'il s'agit de la réunion de deux droites, il faut encore simplifier l'équation :

$$\begin{aligned}
&(1+a)X^2 + (1-a)Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - a^2 = 0 \\
\iff &(1+a)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{1+a}\right)^2 + (1-a)\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{1-a}\right)^2 = a^2 + \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1-a} \\
\iff &(1+a)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{1+a}\right)^2 + (1-a)\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{1-a}\right)^2 = \frac{-a^4 + a^2 + 4}{1 - a^2}.
\end{aligned}$$

   On obtient donc la réunion de deux droites si et seulement si $|a| > 1$ et $-a^4 + a^2 + 4 = 0$, c'est-à-dire si et seulement $a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$.

Ensemble des sommets d'une famille d'ellipse

Déterminer l'ensemble des centres, des sommets et des foyers des ellipses d'équation

$$\lambda x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$.

L'équation réduite de l'ellipse est :

$$\lambda^2 \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \lambda y^2 = 1.$$

Son centre est le point $\Omega(1/\lambda, 0)$, qui parcourt donc la demi-droite $[Ox)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}_*$. Les sommets situés sur $[Ox)$ (pour lesquels $y = 0$), sont les points O et $A(2/\lambda, 0)$. A parcourt lui aussi la demi-droite $[Ox)$. Les sommets pour lesquels $x = 1/\lambda$ sont les points

$$B\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ et } C\left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Il décrivent la parabole d'équation $y = x^2$. Pour décrire les foyers, il faut distinguer le cas $\lambda \geq 1$, pour lequel $\lambda^2 > \lambda$ et le cas $\lambda < 1$, pour lequel $\lambda^2 < \lambda$. Pour $\lambda > 1$, la distance focale vaut

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}}$$

et les foyers (qui sont situés sur l'axe vertical de l'ellipse) sont les points

$$F\left(\frac{1}{\lambda}, \sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}}\right) \text{ et } F'\left(\frac{1}{\lambda}, -\sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}}\right).$$

Ils décrivent le cercle d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$. Pour $\lambda < 1$, la distance focale vaut

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}}$$

et les foyers (qui sont situés sur l'axe horizontal de l'ellipse) sont les points

$$F\left(\frac{1}{\lambda} + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}}, 0\right) \text{ et } F'\left(\frac{1}{\lambda} - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}}, 0\right).$$

Ils décrivent dans ce cas l'axe $[Ox)$.

En coordonnées polaires

Déterminer la nature, l'excentricité et les sommets des coniques suivantes :

1. $\rho(\theta) = \frac{1}{2+\cos\theta}$ **2**. $\rho(\theta) = \frac{1}{2-\cos\theta}$

3. $\rho(\theta) = \frac{1}{1+\sin\theta}$ **4**. $\rho(\theta) = \frac{1}{1+\cos\theta+\sin\theta}$.

Pour les quatre exemples, on va se ramener à l'équation polaire d'une conique de la forme

$$\rho(\theta) = \frac{1}{1 + e\cos(\theta - \phi)}.$$

Les sommets se trouvent aux points obtenus lorsque $\theta = \phi$ et $\theta = \phi + \pi$.

1. Il suffit de factoriser par deux au dénominateur, et la conique a pour équation
$$\rho(\theta)=\frac{1/2}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}.$$
On obtient une conique d'excentricité $1/2$, c'est donc une ellipse. Les sommets sont les points de coordonnée polaire $(\theta=0,\rho=\frac{1/2}{1+1/2}=1/3)$ et $(\theta=\pi,\rho=\frac{1/2}{1-1/2}=1)$, c'est-à-dire les points de coordonnées cartésiennes $(1/3,0)$ et $(-1,0)$.
2. On applique la même méthode, mais il faut encore remarquer que $-\cos(\theta)=\cos(\theta+\pi)$. La conique a donc pour équation
$$\rho(\theta)=\frac{1/2}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta+\pi)}.$$
C'est une ellipse d'excentricité $1/2$. Ces sommets ont pour coordonnées polaires $(\theta=\pi,\rho=\frac{1/2}{1+1/2}=1/3)$ et $(\theta=0,\rho=\frac{1/2}{1-1/2}=1)$, c'est-à-dire les points de coordonnées cartésiennes $(-1/3,0)$ et $(1,0)$.
3. Cette fois, il faut transformer le sinus en cosinus, ce que l'on fait grâce à la relation $\sin(\theta)=\cos(\theta-\pi/2)$. La conique a donc pour équation
$$\rho(\theta)=\frac{1}{1+\cos(\theta-\pi/2)}.$$
C'est une parabole, d'excentricité 1. Son sommet est atteint pour $\theta=\pi/2$, où $\rho(\theta)=\frac{1}{1+1}$. Ceci correspond au point de coordonnées cartésiennes $(0,1)$.
4. On transforme la somme :
$$\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos(\theta-\pi/4).$$
L'équation de la conique est donc :
$$\rho(\theta)=\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos(\theta-\pi/4)}.$$
Il s'agit cette fois d'une hyperbole, d'excentricité $\sqrt{2}$. Ses sommets sont atteints en $\theta=\pi/4$, avec $\rho=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ et $\theta=5\pi/4$, avec $\rho=\frac{1}{1-\sqrt{2}}$. Les coordonnées cartésiennes de ces sommets sont respectivement :
$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}\qquad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$$
et
$$x=\frac{-\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}\qquad y=\frac{-\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

28.1.2 Propriétés géométriques des coniques

Projections orthogonales sur les axes d'une hyperbole

Un point M d'une hyperbole $\mathcal{H}$ est projeté orthogonalement en les points H et H' sur les axes de $\mathcal{H}$. Prouver que le produit $MH \times MH'$ est constant.

Dans un repère orthonormée, l'équation réduite de l'hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Les axes de l'hyperbole sont (D) d'équation $y = -\frac{b}{a}x$ soit $bx+ay = 0$ et (D') d'équation $y = \frac{b}{a}x$, soit $-bx + ay = 0$. Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{H}$. Le produit $MH \times MH'$ est encore égal à

$$\mathrm{dist}(M,(D)) \times \mathrm{dist}(M,(D')).$$

Or, on a des formules pour calculer ces distances :

$$\mathrm{dist}(M,(D)) = \frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \mathrm{dist}(M,(D')) = \frac{|-bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On en déduit que

$$MH \times MH' = \frac{|a^2y^2 - b^2x^2|}{a^2+b^2}.$$

On conclut en utilisant que M est un point de l'hyperbole, et donc que

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

On a donc prouvé que, pour tout point M de l'hyperbole,

$$MH \times MH' = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Le miroir parabolique

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D.

1. Soit M un point de $\mathcal{P}$ et H le projeté orthogonal de M sur la directrice D. Démontrer que la tangente à la parabole en M est la médiatrice de $[FH]$.
2. Montrer que $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FM}) = (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HF})$.

---

1. On travaille dans le repère adapté à la parabole, c'est-à-dire le repère orthonormé pour lequel le foyer a pour coordonnées $(p/2, 0)$ et la directrice a pour équation $x = -p/2$. Alors, la parabole a pour équation $y^2 = 2px$. Soit $t > 0$ tel que M soit de coordonnées $(t^2/2p, t)$. Alors

H a pour coordonnées $(-p/2, t)$. La médiatrice de $[FH]$ est l'ensemble des points équidistants de F et de H. L'égalité $AF^2 = AH^2$, pour A de coordonnées (x, y), se traduit en

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2 + (y - t)^2 \iff -2px + 2yt - t^2 = 0.$$

On reconnait l'équation de la tangente au point M.

2. Puisque la tangente en M est la médiatrice de $[FH]$, les demi-droites $[HF)$ et $(M, \vec{N})$ sont parallèles. On en déduit que les angles $(\overrightarrow{MI}, \vec{N})$ et $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HF})$ sont égaux, ainsi que les angles $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FM})$ et $(\vec{N}, \overrightarrow{MF})$. Or, le triangle FMH est isocèle en M, et donc $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FM}) = (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HF})$. Ce principe est utilisé dans les "paraboles" qui concentrent les signaux émis par un satellite.

Triangle inscrit dans une ellipse

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, et soient M, P deux points de $\mathcal{E}$ tels que la tangente à l'ellipse en P est parallèle à la droite (OM). Montrer que l'aire du triangle MOP ne dépend pas de la position de M et de P sur l'ellipse.

Dans un repère (centré en O), l'ellipse admet une représentation paramétrée de la forme

$$\begin{cases} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= b\sin t \end{cases}$$

On suppose que M a pour coordonnées $(a\cos t, b\sin t)$ et que P a pour coordonnées $(a\cos\theta, b\sin\theta)$. On commence par chercher une relation entre t et θ exprimant que la tangente à $\mathcal{E}$ en P est parallèle à (OM). Pour cela, on remarque que la tangente à $\mathcal{E}$ en P a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{OM}$ sont colinéaires, et donc leur déterminant est nul. On trouve :

$$ab\cos t\cos\theta + ab\sin t\sin\theta = ab\cos(t - \theta) = 0.$$

En particulier, $t = \theta + \pi/2\ [\pi]$. Calculons maintenant l'aire du trianle MOP. Elle vaut :

$$\frac{1}{2}|\det(\vec{OM}, \vec{OP})| = \frac{1}{2}|ab\cos t\sin\theta - ab\cos\theta\sin t| = \frac{ab}{2}|\sin(t-\theta)| = \frac{ab}{2}$$

puisque $t - \theta = \pi/2\ [\pi]$.

Ellipses concentriques

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et soit $\mathcal{E}'$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$.

1. Démontrer que la droite D d'équation $ux+vy+w=0$ est tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ si et seulement si ses coefficients vérifient l'équation $a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$ et $w\neq 0$.
2. Soit $A(2\cos a, 2\sin a)$ et $B(2\cos b, 2\sin b)$ deux points distincts de l'ellipse $\mathcal{E}'$. Démontrer que la droite (AB) est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si $a-b=2\pi/3\ [2\pi]$ ou $a-b=-2\pi/3\ [2\pi]$.
3. Soient M,P,Q trois points distincts de $\mathcal{E}'$ tels que (MP) et (MQ) sont tangentes à $\mathcal{E}$. Démontrer que la droite (PQ) est tangente à $\mathcal{E}$.

---

1. Rappelons que la tangente à l'ellipse au point (x_0,y_0) a pour équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$. Si on suppose que la droite D d'équation $ux+vy+w=0$ est tangente à l'ellipse, il existe donc un point (x_0,y_0) de $\mathcal{E}$ tel que D est aussi la droite d'équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$. Ces deux équations de droite sont proportionnelles, et on en déduit $w\neq 0$ et $\frac{u}{w}=-\frac{x_0}{a^2}$ et $\frac{v}{w}=-\frac{y_0}{b^2}$. Mais le point (x_0,y_0) est sur l'ellipse, et donc $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Utilisant la relation précédente, on en déduit que $a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$. Réciproquement, si $a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$ et $w\neq 0$, alors, s'inspirant de la preuve du sens direct, on pose $x_0=-\frac{a^2u}{w}$ et $y_0=-\frac{b^2v}{w}$. Alors on vérifie facilement que (x_0,y_0) est un point de $\mathcal{E}$, et que la droite D a aussi pour équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$.
2. La droite (AB) a pour équation
$$b\big(\sin(b)-\sin(a)\big)x-a\big(\cos(b)-\cos(a)\big)y-2ab\sin(b-a)=0.$$
D'après la question précédente, (AB) tangente à $\mathcal{E}$
$$\begin{aligned}&\iff\quad a^2b^2\big(\sin(b)-\sin(a)\big)^2+a^2b^2\big(\cos(b)-\cos(a)\big)^2-4a^2b^2\sin^2(b-a)=0\\&\iff\quad 2\cos^2(b-a)-\cos(b-a)-1=0.\end{aligned}$$
Or, le polynôme $2x^2-x-1$ admet pour seules racines 1 et $-1/2$. La droite (AB) est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement $\cos(b-a)=-1/2$ (le cas $\cos(b-a)=1$ est à exclure puisque les points sont distincts), et donc on a $b-a=2\pi/3\ [2\pi]$ ou $b-a=-2\pi/3\ [2\pi]$.
3. On écrit $M(2\cos(m),2\sin(m))$, $P(2\cos(p),2\sin(p))$ et $Q(2\cos(q),2\sin(q))$. D'après la question précédente, on a, quitte à échanger le rôle de M et P, $m-p=2\pi/3\ [2\pi]$. Puisque $P\neq Q$, on a alors $m-q=-2\pi/3\ [2\pi]$. On en déduit que $q-p=4\pi/3=-2\pi/3\ [2\pi]$, et donc la droite (PQ) est tangente à l'ellipse.

Cercle orthoptique d'une ellipse
Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1. Soit m un réel. Déterminer les droites de coefficient directeur m qui sont tangentes à $\mathcal{E}$.
2. A quelle condition les droites $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont elles perpendiculaires ?
3. En déduire que le lieu des points du plan par lesquels passent deux tangentes à $\mathcal{E}$ qui sont perpendiculaires est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

---

1. Soit $y=mx+p$ une telle droite. On cherche les points d'intersection de cette droite avec l'ellipse $\mathcal{E}$. Pour cela, on introduit cette relation dans l'équation de l'ellipse, et on trouve
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2+2mpx+p^2}{b^2}=1 \iff (b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mpx+(a^2p^2-a^2b^2)=0.$$
Pour que la droite soit tangente, cette équation doit avoir une unique solution, et donc son discriminant doit être nul. On trouve
$$\begin{aligned}\Delta' &= a^4m^2p^2-(a^2p^2-a^2b^2)(b^2+a^2m^2)\\ &= -a^2p^2b^2+a^2b^4-a^4n^2b^2\end{aligned}$$
et ceci est nul si et seulement si
$$p=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$
2. C'est du cours. C'est vrai si et seulement si $mm'=-1$ (ce qui peut se retrouver en écrivant un vecteur directeur de chaque droite et en écrivant qu'ils doivent être orthogonaux).
3. Soit
$$\begin{aligned}y &= mx\pm\sqrt{b^2+a^2m^2}\\ y &= -\frac{x}{m}\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}\end{aligned}$$
deux droites tangentes à l'ellipse qui sont orthogonales. On cherche leur point d'intersection. En mettant les équations au carré, on trouve
$$\begin{aligned}(y-mx)^2 &= b^2+a^2m^2\\ (mx+y)^2 &= a^2+b^2m^2.\end{aligned}$$

En sommant ces égalités, on trouve

$$(m^2+1)x^2+(m^2+1)y^2=(m^2+1)(a^2+b^2)$$

et donc le point d'intersection est nécessairement sur le cercle d'équation

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

Réciproquement, tout point de cercle convient, il suffit de le vérifier (mais c'est un peu pénible...).

28.1.3 Lieux géométriques

Carré des distances aux trois côtés d'un triangle

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(1,0)$ et $B(1,0)$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan dont la somme des carrés aux trois côtés du triangle OAB est égale à $1/3$.

1. Démontrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse dont on donnera une équation réduite.
2. Montrer que l'ellipse $\mathcal{E}$ est tangente aux droites (OA) et (OB).
3. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{E}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

---

1. Soit $M(x,y)$ un point du plan. La distance de M à
   — (OA) vaut $|y|$;
   — (OB) vaut $|x|$;
   — (AB) vaut $\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$ (une équation de la droite (AB) étant $x+y-1=0$).

   On fait la somme des carrés de ces trois distances, et on trouve que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points (x,y) vérifiant

   $$3x^2+2xy+3y^2-2x-2y=-\frac{1}{3}.$$

   On reconnait l'équation d'une conique qui est une ellipse car son discriminant vaut $\Delta=2^2-4\times3\times3=-32$ et est donc strictement négatif. Pour déterminer l'équation réduite de $\mathcal{E}$, on remarque que les coefficients devant x^2 et y^2 sont identiques. Ceci incite à faire un changement de repère par rotation de $\pi/4$, et donc les nouvelles coordonnées (X,Y) de M sont liées aux anciennes par la relation :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y\\ y &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{array}\right.$$

L'équation de $\mathcal{E}$ devient

$$4X^2 + 2Y^2 - 2\sqrt{2}X = -\frac{1}{3}$$

soit, en regroupant les termes en X sous forme canonique, puis en multipliant les deux membres par 6 :

$$24\left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 12Y^2 = 1.$$

On obtient donc une ellipse de centre Ω dont les coordonnées, dans le nouveau repère, sont $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$, soit, dans l'ancien repère, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Son demi-grand axe vaut $1/\sqrt{12}$, et son demi-petit axe vaut $1/\sqrt{24}$.

2. Cherchons les points d'intersection de $\mathcal{E}$ avec l'axe (Ox). Dans le repère initial, ces points ont pour coordonnée $(x, 0)$ et on doit résoudre l'équation
$$3x^2 - 2x + 1/3 = 0.$$
Son discriminant est nul, donc l'équation admet une racine double, $x = 1/3$. L'ellipse $\mathcal{E}$ est donc tangente à (Ox) au point $(1/3, 0)$. Par symétrie de l'ellipse par rapport à la droite $y = x$ (ou par symétrie du problème), on en déduit que l'ellipse est tangente à l'axe (Oy) au point $(0, 1/3)$.

3. Dans le nouveau repère, on peut paramétrer l'ellipse par
$$\left\{\begin{array}{lcl} X(t) & = & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{12}}\cos t \\ Y(t) & = & \frac{1}{\sqrt{24}}\sin(t). \end{array}\right.$$
En utilisant les formules de changement de repère, on trouve dans l'ancien repère, après simplifications,
$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{12}\sin t \\ y(t) & = & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{12}\cot t + \frac{\sqrt{3}}{12}\sin t. \end{array}\right.$$

Lieu des centres d'un cercle

Soit $a > 0$ un réel. On munit le plan d'un repère orthonormé. Déterminer le lieu des centres des cercles tangents à (Oy) et coupant l'axe (Ox) en deux points M et M' tels que $MM' = a$.

Soit $C(x,y)$ un tel point et soit D le point de tangence du cercle à l'axe (Ox). Alors $CD = CM = CM' = x$. Soit $I(x,0)$ le projeté orthogonal de C sur l'axe (Ox). I est aussi le milieu de $[MM']$. Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle MIC, rectangle en I. On a

$$y^2 + (a/2)^2 = x^2 \implies y^2 - x^2 = -a^2/4.$$

Le point C appartient donc à l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = a^2/4$. Réciproquement, si C est un point de cette hyperbole, ses coordonnées sont de la forme

$$C = \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{x^2 - a^2/4} \end{pmatrix}.$$

Alors les points $M(x-a,0)$ et $M'(x+a,0)$ appartiennent au cercle de centre C et de rayon x. Ce cercle est tangent à (Oy) et $MM' = a$. Ainsi, on a bien prouvé que l'ensemble recherché est exactement l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = a^2/4$.

Détermination de points

Soient A et B deux points distincts du plan et soit I le milieu de $[AB]$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $MI^2 = MA \times MB$.

On va travailler dans un repère orthonormé où les calculs seront le plus facile possible. Par exemple, on va prendre un repère orthonormé de centre I tel que A a pour coordonnée $(a,0)$ et B a pour coordonnée $(-a,0)$. Soit $M(x,y)$. Alors

$$MI^2 = MA \times MB \iff MI^4 = MA^2 \times MB^2$$

(tout est positif). Or,

$$MI^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2.$$

$$MA^2 \times MB^2 = x^4 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + y^4.$$

On a donc

$$MI = MA \times MB \iff -2a^2x^2 + a^4 + 2a^2y^2 = 0 \iff \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1.$$

On reconnait l'équation d'une hyperbole équilatère.

28.2 Quadriques

Réduction d'équation
Soit Γ la quadrique d'équation

$$4z^2 + 2xy - 2x = 0.$$

Trouver un repère orthonormal dans lequel l'équation de Γ est réduite. Quel est la nature de cette quadrique ?

indication Appliquer la méthode classique, c'est-à-dire d'abord réduction de la forme quadratique, puis translation du repère pour éliminer les termes linéaires.

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation de la quadrique s'écrit ${}^tXAX + {}^tBX = 0$. On diagonalise A : les valeurs propres sont $1, -1$ et 4 et la matrice de passage orthogonale est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice correspond à une matrice de rotation d'angle $\pi/4$ et d'axe (O,k). En effectuant le changement de variable $X = PX'$, l'équation devient

$$x'^2 - y'2 + 4z'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0.$$

On regroupe les termes contenant les mêmes variables :

$$\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4z'^2 = 0.$$

Ainsi, en posant $x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $z'' = z$, l'équation réduite devient

$$x''^2 - y''^2 + 4z'' = 0.$$

La quadrique est donc un cône.

Chapitre 29

Propriétés Métriques de Courbes Planes

29.1 Longueur - Abscisse Curviligne

Longueur de l'astroïde
Calculer la longueur de l'astroïde de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] .$$

On a $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t$ et $y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$, de sorte que

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9\cos^2 t \sin^2 t.$$

D'après la formule du cours, la longueur de l'astroïde est donc égale à

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} dt = 3\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| dt = 12\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 6\int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = 6.$$

Longueur d'une arche de cycloïde
Calculer la longueur d'une arche de cycloïde de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] .$$

On a $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$ de sorte que

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 2 - 2\cos t = 4\sin^2(t/2).$$

Pour $t \in [0, 2\pi]$, $t/2 \in [0, \pi]$ et donc $\sin(t/2) \geq 0$. On en déduit que la longueur de l'arche de cycloïde est :

$$\int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)dt = 8.$$

Longueur de la cardioide
Déterminer la longueur de la cardioide d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

La courbe $\theta \mapsto (1 + \cos\theta)e^{i\theta}$ est 2π-périodique, et 2π est la plus petite période possible. D'après la formule du cours, la longueur de la cardioide est :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos\theta)}d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \cos(\theta/2)d\theta \\ &= 8.\end{aligned}$$

Longueur d'une boucle
Calculer la longueur de la boucle de la courbe de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Il n'est pas nécessaire d'étudier toute la courbe, mais il faut néanmoins déterminer son point double. On cherche donc $s \neq t$ tel que $x(s) = x(t)$ et $y(s) = y(t)$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} 3t^2 - 1 &= 3s^2 - 1 \\ 3t^3 - t &= 3s^3 - s. \end{cases}$$

On multiplie par t la première ligne, et on lui retranche la deuxième. On trouve l'équation

$$3s^2t - t - 3s^3t - st = 0 \iff (t - s)(3s^2 - 1) = 0.$$

Puisqu'on veut $t \neq s$, on se ramène à $3s^2 - 1 = 0 \iff s = \pm 1/\sqrt{3}$. On obtient donc un point double obtenu pour les valeurs du paramètre valant $-1/\sqrt{3}$ et $1/\sqrt{3}$. La longueur de la boucle est donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} (9t^2 + 1) dt \\
&= 2\left[3t^3 + t\right]_0^{1/\sqrt{3}} \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Même longueur

Sans les calculer complètement, démontrer que la longueur des deux courbes suivantes sont égales ($a > 0$) :

- L'ellipse d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 4a^2$;
- Le trèfle à quatre feuilles d'équation polaire $\rho(\theta) = a\cos(2\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

On va commencer par paramétrer l'ellipse. On a en effet

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2 \iff \left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1.$$

L'ellipse est donc paramétré par $t \mapsto (2a\cos t, a\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Sa longueur est alors égale à

$$\ell_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt.$$

Pour calculer la longueur du trèfle, on applique simplement la formule du cours. Sachant que $\rho'(\theta) = -2a\sin(2\theta)$, on trouve

$$\ell_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2(2\theta) + a^2 \cos^2(2\theta)} d\theta.$$

Pour prouver que les deux intégrales sont égales, on fait le changement de variables $t = 2\theta$ dans ℓ_2, et on trouve

$$\begin{aligned}
\ell_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} dt \\
&= \ell_1.
\end{aligned}$$

Jusqu'où faut-il intégrer ?
Calculer la longueur de la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \cos^3(\theta/3)$.

Il y a un problème pour déterminer les bornes entre lesquelles intégrer pour déterminer la longueur de la courbe. En particulier, les points θ et $\theta + 2\pi$ ne donnent pas le même point sur la courbe. L'idée est de poser $f(\theta) = e^{i\theta}\cos^3(\theta/3)$ et de déterminer la plus petite période de cette fonction (qui est le paramétrage de la courbe). f est 3π-périodique. Sa plus petite période est donc de la forme $3\pi/n$, où n est un entier. Mais $f(\theta)$ a pour argument θ modulo π. Si $3\pi/n$ est une période de f, ce doit être un multiple de π, et donc $n = 1$ ou $n = 3$. Mais $n = 3$ est exclu (comparer $f(0)$ et $f(\pi)$ par exemple). On détermine donc la longueur de la courbe en intégrant entre 0 et 3π. De plus, on a

$$\rho'(\theta) = -\sin(\theta/3)\cos^2(\theta/3)$$

ce qui entraine

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\sin^2(\theta/3)\cos^4(\theta/3) + \cos^6(\theta/3)} = \cos^2(\theta/3).$$

On en déduit que la longueur de la courbe est

$$\begin{aligned}\int_0^{3\pi} \cos^2(\theta/3)d\theta &= 3\int_0^{\pi} \cos^2 u du\\ &= 3\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2u}{2}du\\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Paramétrage normal
Donner un paramétrage normal du cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

On cherche un paramétrage $t \mapsto f(t)$ du cercle tel que $\|f'(t)\| = 1$ pour tout réel t. On peut en deviner un, ou bien utiliser l'abscisse curviligne. En effet, $g : t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$ est un paramétrage du cercle. L'abscisse curviligne est une primitive de

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = R,$$

soit par exemple $s(t) = Rt$. On en déduit $s^{-1}(t) = R/t$, et un paramétrage normal est donné par $f = g \circ s^{-1}$, soit $g(t) = (R\cos(t/R), R\sin(t/R))$.

29.2 Courbure

Détermination angulaire et courbure en coordonnées cartésiennes
Pour les courbes paramétrées suivantes, donner une détermination angulaire et en déduire la courbure en chaque point régulier :

1. la portion d'astroïde d'équation paramétrique $(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \pi/2]$;
2. l'arche de cycloïde d'équation paramétrique $(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

---

1. On commence par chercher la dérivée de l'abscisse curviligne :
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 3\cos t \sin t.$$
On cherche ensuite le vecteur tangent unitaire :
$$\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$
Une détermination angulaire α est telle que
$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}.$$
La fonction $\alpha(t) = \pi - t$ convient. On en déduit alors la courbure par la formule :
$$\gamma = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{-1}{3\sin t\cos t}.$$
2. On reprend exactement la même méthode. On a successivement :
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = 2\sin(t/2),$$
$$\vec{T}(t) = \frac{1}{2\sin(t/2)}\begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}.$$
La fonction $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ convient. On en déduit
$$\gamma = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{-1/2}{2\sin(t/2)} = -\frac{1}{4\sin(t/2)},$$
formule valable pour $t \in]0, 2\pi[$.

Courbure en coordonnées polaires

Pour les courbes paramétrées en coordonnées polaires suivantes, donner une détermination angulaire et en déduire la courbure en chaque point régulier :

1. la spirale d'équation $\rho = e^{a\theta}$, $a > 0$;
2. la cardioïde d'équation $\rho = 1 + \cos\theta$.

Le point clé est qu'on connait toujours les coordonnées du vecteur tangent (unitaire) dans la base mobile $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$: elles valent

$$\cos V = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \text{ et } \sin V = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}.$$

La détermination angulaire est donc $\alpha + V$ et il faut pour chacune des courbes trouver une expression analytique de V en connaissant son cosinus et son sinus.

1. Dans ce cas, on a

   $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} = \sqrt{1 + a^2}e^{a\theta}.$$

   D'autre part, on a

   $$\cos V = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ et } \sin V = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

   Ceci ne dépend pas de θ, et donc l'angle entre $\vec{T}$ et $\vec{U}_\theta$ est constant. Notons α_0 cette constante. Une détermination angulaire sur la courbe est donc la fonction $\theta \mapsto \alpha_0 + \theta$. Le fait de ne pas connaitre α_0 n'est pas très grave, car dans le calcul de la courbure on n'utilise que la dérivée de cette fonction. En effet, la courbure vaut

   $$\gamma = \frac{\frac{d\alpha}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{e^{-a\theta}}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

2. On peut restreindre l'étude de la courbe à $\theta \in [-\pi, \pi]$ (la fonction $\theta \mapsto 1 + \cos\theta$ est 2π-périodique). Avec la même méthode, on trouve

   $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = 2\cos(\theta/2)$$

   ce qui donne

   $$\cos(V) = -\sin(\theta/2) \text{ et } \sin V = \cos(\theta/2).$$

Un choix possible de V est $\frac{\theta}{2}+\pi 2$, et donc une détermination angulaire de la courbe est donnée par la fonction $\theta \mapsto \frac{3\theta}{2}+\pi 2$. On en déduit

$$\gamma = \frac{\frac{3}{2}}{2\cos(\theta/2)} = \frac{3}{4\cos(\theta/2)}.$$

Chaînette

La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant, homogène, tenu à ses deux extrémités. Dans un repère approprié, elle admet pour équation $y=\cosh(x)$. Déterminer la longueur d'un arc de chaînette. Préciser le repère de Frénet et la courbure en un point.

Il suffit de se laisser guider par les formules du cours, la seule difficulté supplémentaire venant de l'utilisation de formules de trigonométrie hyperbolique. Posons $f(t)=(t,\cosh t)$ un paramétrage de la courbe. On a $f'(t)=(1,\sinh t)$, $f''(t)=(0,\cosh t)$, de sorte que

$$\|f'(t)\| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t.$$

Ainsi, la longueur de l'arc de chaînette comprise entre les points d'abscisse x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$ est

$$\int_{x_1}^{x_2} \cosh t dt = \sinh(x_2) - \sinh(x_1).$$

Le repère de Frénet en $M(t)$ est donné par

$$\vec{T}(t) = \left(\frac{1}{\cosh t}, \tanh(t)\right) \text{ et } \vec{N}(t) = \left(-\tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right).$$

La courbure vaut :

$$\gamma(t) = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Courbure et parabole

On considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$, avec $p>0$, et soit M un point de la parabole.

1. Déterminer la courbure γ en M.
2. Soit N le point d'intersection de la normale à la parabole en M avec la directrice de la parabole. Démontrer que $2MN = -1/\gamma$.

---

1. La parabole est paramétrée par $t \mapsto (t^2/2p, t) = f(t)$. On a donc $f'(t) = (t/p, 1)$ et $f''(t) = (1/p, 0)$. On en déduit que, au point $M(t^2/2p, t)$, la courbure vaut
$$\gamma = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3} = \frac{-1/p}{\sqrt[3]{(t^2+p^2)/p^2}} = \frac{-p^2}{(t^2+p^2)^{3/2}}.$$
2. La tangente à la parabole au point (x_0, y_0) a pour équation $yy_0 = p(x+x_0)$. Un vecteur directeur de la tangente en $M(t^2/2p, t)$ est donc $(1, p/t)$. Un vecteur directeur de la normale est alors $(-p/t, 1)$. Autrement dit, la normale en M a pour équation
$$x - \frac{t^2}{2p} + \frac{p}{t}(y-t) = 0.$$
La directrice ayant pour équation $x = -p/2$, on détermine facilement les coordonnées du point N : $N = \left(-\frac{p}{2}, \frac{3t}{2} + \frac{t^3}{2p^2}\right)$. On en déduit
$$\overrightarrow{NM} = \left(\frac{p(t^2+p^2)}{2p^2}, \frac{t(t^2+p^2)}{2p^2}\right),$$
ce qui donne
$$NM = \frac{(t^2+p^2)^{3/2}}{2p^2} = -1/\gamma.$$

Développée de l'ellipse

Soit $\Gamma = (I, f)$ un arc paramétré birégulier. Le centre de courbure au point $M(t)$ est le point $C(t)$ défini par $\overrightarrow{M(t)C(t)} = \frac{1}{\gamma(t)}\vec{N}(t)$, où $\vec{N}(t)$ est le vecteur normal en $M(t)$. L'arc paramétré (I, C) s'appelle développée de Γ. Déterminer la développé d'une ellipse.

On peut toujours supposer qu'on a affaire à une ellipse d'équation réduite
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Cette ellipse admet le paramétrage $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$. On a successivement
$$f'(t) = (-a\sin t, b\cos t) \text{ et } f''(t) = (-a\cos t, -b\sin t).$$

On en déduit que

$$\det(f'(t), f''(t)) = ab.$$

De plus,

$$\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

et donc la courbure vaut

$$\gamma(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Par ailleurs, le vecteur tangent $\vec{T}(t)$ vaut

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 + b^2 \sin^2 t}}(-a \sin t, b \cos t).$$

Le vecteur normal correspondant est donc

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 + b^2 \sin^2 t}}(-b \cos t, a \sin t).$$

Les coordonnées du centre de courbure $C(t)$ sont donc

$$\begin{aligned} C(t) &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab}(-b \cos t, a \sin t) \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right). \end{aligned}$$

Arcs paramétrés à courbure constante
Déterminer les arcs de classe C^2 dont la courbure est constante.

On utilise un paramétrage (I, f) de la courbe par abscisse curviligne. Soit α une détermination angulaire de la courbe, c'est-à-dire qu'en tout s de I, on a $f'(s) = e^{i\alpha(s)}$. Les formules de Frénet entraînent que

$$\frac{d\alpha}{ds} = \gamma(s) = C,$$

où γ est la fonction courbure. En intégrant, on trouve $\alpha(s) = Cs + \alpha_0$. Quitte à effectuer une rotation du repère, on peut supposer que $\alpha_0 = 0$. On a alors $f'(s) = e^{iCs}$. On intègre alors, et on distingue deux cas :

- Si $C \neq 0$, on obtient $f(s) = \frac{1}{C} e^{iCs} + z_0$. On reconnait un cercle de centre d'affixe z_0 et de rayon $1/C$.

— Si $C = 0$, alors on obtient $f(s) = s + z_0$. On reconnait la droite orientée par $\vec{i}$ et passant par z_0. Tenant compte de la rotation initiale du repère, on peut en réalité obtenir n'importe quelle droite.

Réciproquement, on vérifie facilement qu'une droite et un cercle sont à courbure constante.

La courbure détermine la courbe

Soient (I, f) et (I, g) deux arcs paramétrés réguliers paramétrés par abscisse curviligne.

1. Démontrer que s'il existe un déplacement du plan φ tel que $f = \varphi \circ g$, alors f et g ont la même fonction courbure.
2. Réciproquement, on suppose que f et g ont la même fonction courbure.
   (a) On note α une détermination angulaire de f et β une détermination angulaire de g. Démontrer que α et β diffèrent d'une constante.
   (b) En déduire qu'il existe un déplacement du plan φ tel que $f = \varphi \circ g$.

---

1. Puisque les paramétrages sont normaux, la courbure de (I, f) est donnée par $\det(f', f'')$ et celle de (I, g) par $\det(g', g'')$. Mais on sait que $f = \varphi \circ g = ag + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. En particulier, $f' = ag' + b = \varphi \circ g'$ et $f'' = \varphi \circ g''$. Mais, toujours parce que φ est un déplacement, $\det(\varphi \circ f', \varphi \circ f'') = \det(f', f'')$. Ainsi, on a bien $\det(f', f'') = \det(g', g'')$, et les deux courbures sont identiques.
2. (a) Notons γ la fonction courbure. On sait que
   $$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\beta}{ds} = \gamma.$$
   Ainsi, α et β ont même dérivée, et donc elles ne diffèrent sur l'intervalle I que d'une constante k.
   (b) Puisqu'on a un paramétrage normal, on a
   $$g'(s) = e^{i\beta(s)} \text{ et } f'(s) = e^{i\alpha(s)} = e^{ik}e^{i\beta(s)} = e^{ik}g'(s).$$
   En intégrant, on trouve
   $$f(s) - f(s_0) = e^{ik}(g(s) - g(s_0)).$$
   Posant $a = e^{ik}$, qui est de module 1, et $b = f(s_0) - e^{ik}g(s_0)$, on trouve que
   $$f(s) = ag(s) + b,$$
   ce qui prouve bien que $f = \varphi \circ g$, avec φ le déplacement d'expression analytique $\varphi(z) = az + b$.

Cinquième partie

Points de culture

Partitionnement de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ en cercles

L'idée de ce point est de réfléchir sur des notions de partitionnements du plan et de l'espace avec des cercles.

1. Donner une condition nécessaire pour que deux cercles du plan n'aient pas une intersection nulle
2. Existe-t'il un partitionnement de $\mathbb{R}^2$ avec des cercles ?
3. Existe-t'il un partitionnement de $\mathbb{R}^3$ avec des cercles ?

Démonstration. (*rapidement*)

1. Trivial ! ☺

2. Démonstration assez simple en invoquant notament le théorème des fermés emboités (caractère **complet** du plan euclidien) pour établir une contradiction avec un cercle de rayon nul → **Impossible.**

3. Ici, il va falloir s'appuyer sur la démonstration de deux lemmes pour prouver la possibilité du partitionnement :

— Lemme 1 : Toute sphère privée de deux points distincts peut-être partitionnée en cercles.

— On construit une suite de cercles $(C_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ dans le plan xOy de rayon $\frac{1}{2}$ et donc le $m^{\text{ième}}$ centre est de la forme $(2m+\frac{1}{2}, 0)$.

Lemme 2 : Toute sphère S de rayon strictement positif centrée en l'origine intersecte $\underset{m\in\mathbb{Z}}{\cup} C_m$ en exactement deux points distincts.

Pour partitionner, on garde cette suite de cercles du plan sur l'axe Ox et on prend en plus une suite de shpères de rayons positifs divergeants en $+\infty$ centrées en 0. **ET BIM !** ☺

□

Un problème dans le plan, puis dans les hyperplans

Table des matières